ENSIIE 1A 2015/2016
Analyse numérique matricielle MAN

Méthodes itératives

1 Rappels de cours

1.1 Principe général

Les méthodes itératives utilisées pour résoudre les systèmes linéraires $Ax = b$, avec $A \in K^{n\times n}$ et $b \in K^n$, construisent une suite de vecteurs $\left(x^{(k)}\right)_k$ qui doit tendre vers la solution x.

Ces méthodes ont en commun le fait que chaque itération nécessite une nombre d'opérations du même ordre de grandeur que celui nécessaire à faire un produit matrice $\times$ vecteur.

1.2 Méthode de Jacobi, de Gauss-Seidel et SOR

Chacune de ces méthodes consiste à construire la suite $\left(x^{(k)}\right)_k$ grâce à une relation de récurrence du type : $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + \tilde{b}$.

On rappelle les différentes écritures matricielles de ces méthodes.
On décompose $A = D - E - F$ où

- D est diagonale,
- E est triangulaire inférieure stricte,
- F est triangulaire supérieure stricte.

Cette décomposition est unique.

Alors, la matrice B et le vecteur $\tilde{b}$ sont donnés, pour chaque méthode, de la manière suivante :

Jacobi :	$B = J = D^{-1}(E + F) = I_n - D^{-1}A,$	$\tilde{b} = D^{-1}.$
Gauss-Seidel :	$B = \mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F = I_n - (D - E)^{-1}A,$	$\tilde{b} = (D - E)^{-1}.$
SOR :	$B = \mathcal{L}_\omega = (D - \omega E)^{-1}(\omega F + (1 - \omega)D),$	$\tilde{b} = \omega(D - \omega E)^{-1}.$

On peut écrire sous forme plus générique chacune des méthodes précédentes en décomposant $A = M - N$, où M est inversible (dont l'inverse est peut coûteux à calculer). On écrit alors la relation de récurrence :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b.$$

$M^{-1}N$ est donc la matrice d'itération associée à cette méthode. Les matrices M et N associées aux méthodes précédentes sont :

Jacobi :	$M = D,$	$N = D + E.$
Gauss-Seidel :	$M = D - E,$	$N = F.$
SOR :	$M = \frac{1}{\omega}D - E,$	$N = (\frac{1}{\omega} - 1)D + F.$

1.3 Test d'arrêt

Comme on cherche à résoudre un système linéaire en construisant une suite définie par récurrence, il faut se donner un tester pour arrêter l'itération. En général, on utilise le test suivant :

- On fixe $\epsilon > 0$ suffisamment petit (0.001 par exemple).
- On s'arrête dès
$$\frac{||Ax^{(k)} - B||}{||b||} \leq \epsilon.$$

Remarque : On utilise en général $|| \cdot ||_\infty$ ou $|| \cdot ||_2$.
En posant $e^{(k)} = x - x^{(k)}$, l'inégalité précédente implique

$$||e^{(k)}|| \leq |||A|||\ |||A^{-1}|||\epsilon.$$

1.4 Convergence et vitesse de convergence

Théorème 1. *Soit $A \in K^{n\times n}$ et $b \in K^n$. On se fixe deux matrices M et N telles que M est inversible et $A = M - N$. On pose $B = I_n - M^{-1}A$ et $\tilde{b} = M^{-1}b$. On définit la suite $\left(x^{(k)}\right)_k$ par récurrence :*

$$x^{(0)} \in K^n$$
$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + \tilde{b}.$$

Si $\rho(B) < 1$ alors la suite $\left(x^{(k)}\right)_k$ converge vers x, solution de $Ax = b$.

Définition 1. *On appelle vitesse (ou taux) moyenne (moyen) de convergence pour k itérations de la matrice d'itération B le nombre*

$$R_k(B) = -ln\big(|||B^k|||\big).$$

Remarque 1. *Si $\rho(B) < 1$ (donc la méthode est convergente, vu le théorème 1) alors $|||B^k|||^{\frac{1}{k}} < 1$ à partir d'un certain rand, et donc $R_k(B) > 0$ à partir d'un certain rang.*

Le calcul de $|||B^k|||^{\frac{1}{k}}$ peut être coûteux. On introduit donc la notion de vitesse de convergence asymptotique, plus facile à calculer :

Définition 2. *On appelle vitesse de comvergence asymptotique de la méthode itérative dont la matrice d'itération est B le nombre*

$$\mathcal{R}(B) = -ln(\rho(B)).$$

2 Applications numériques

On considère la matrice et le vecteur :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Méthodes itératives à nombre d'itérations fixe.
   (a) Écrire une fonction prenant en argument une matrice d'i'teration B, un vecteur b, un entier n et le vecteur initial $x^{(0)}$ et qui retourne le vecteur $x^{(n)}$, $n$ème itéré de la méthode
   $$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b.$$
   (b) À l'aide de cette fonction, calculer $x^{(20)}$ où la suite $\left(x^{(k)}\right)_k$ est définie par la méthode itérative $x^{(0)} = b$, $x^{(k+1)} = (I_4 - A)x^{(k)} + b$ où A et b sont donnés par (1).

2. Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel.
   (a) Écrire une fonction prenant en argument une matrice A et renvoyant les 3 matrices de la décomposition classique $A = D - E = F$, D diagonale, E TIS, F TSS.
   (b) Écrire une fonction prenant en argument une matrice A et un vecteur b et renvoyant la matrice de Jacobi J et le vecteur $\tilde{b}$ associé.
   Écrire la fonction correspondante pour la méthode de Gauss-Seidel.
   (c) Écrire les fonctions permettant d'obtenir le $n$ème vecteur itéré par les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel appliquées au problème $Ax = b$.
   (d) Calculer les 10èmes, 20èmes et 30èmes itérés obtenus par les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées au problème $Ax = b$ donné par (1).

3. Reprendre les questions du 2. pour la méthode SOR avec l'argument supplémentaire ω. Tester différentes valeurs de ω pour la question (2d).

4. Méthodes itératives avec test d'arrêt.
   (a) Écrire les fonctions de résolution approchée de $Ax = b$ par les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et SOR avec un test d'arrêt standard. Chaque fonction prendra en argument la matrice A, le second membre b, le nombre maximal d'itérations autorisé (très important si la méthode s'avère divergente), le vecteur initial $x^{(0)}$ et la valeur de ϵ. Les fonctions devront retourner la solution approchée et le nombre d'itérations effectuées. Pour le test, on utilisera la norme $||\cdot||_1$.
   (b) Tester ces fonctions sur la matrice de discrétisation à 20 points du Laplacien en dim. 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{20\times 20},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{20} \tag{2}$$

les autres parmètres étant laissés au choix.

(c) Tracer le graphe du nombre d'itérations nécessaire pour obtenir l'approximation de la solution de $Ax = b$ à ϵ près par la méthode SOR en fonction de $\omega \in [0, 2]$. On pourra prendre 41 valeurs de ω équiréparties sur $[0, 2]$ et une valeur au choix (assez petite) de ϵ.

(d) En déduire la valeur de ω pour lquelle la méthode est la plus rapide.

5. Vitesse de convergence asymptotique.

   (a) Écrire une fonction renvoyant le rayon spectral d'une matrice B.

   (b) Écrire une fonction renvoyant la vitesse de convergence asymptotique de la méthode SOR appliquée à un problème $Ax = b$.

   (c) Tracer le graphe pour $\omega \in [0, 2]$ de la vitesse de convergence asymptotique de la méthode SOR où A et b sont donnés par (2).

   (d) Comparer le résultat avec celui de (4d).