Exercice 1

On considère le système linéaire $Ax = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible

   A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$

   $\det A = 14 \neq 0$ donc A inversible

2. Appliquer la méthode de Jacobi, en prenant $x^{(0)} = 0$, on donnera les deux premières itérations.

   Méthode de Jacobi

   Initialisation : $x^{(0)}$ donné

   Itération : $x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$

   Itération 0 :

   $x^{(0)} = 0$

   Itération 1 :

   $$x_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(0)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_2^{(0)} = 1$$
   $$x_2^{(1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(0)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(0)} = \frac{2}{3}$$
   $$x_3^{(1)} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(0)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(0)} = -2$$
   $$\Rightarrow x^{(1)} = \left(1, \frac{2}{3}, -2\right)$$

   Itération 2 :

   $$x_1^{(2)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_2^{(1)} = \frac{4}{3}$$
   $$x_2^{(2)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(1)} = \frac{1}{3}$$
   $$x_3^{(2)} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(1)} = -2$$
   $$\Rightarrow x^{(2)} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2\right)$$

3. Appliquer la méthode de Gauß-Seidel, en prenant $x^{(0)} = 0$, on donnera les deux premières itérations.

   Méthode de Gauß-Seidel

   Initialisation : $x^{(0)}$ donné

   Itération : $x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j\neq i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$

   Itération 0 :

   $x^{(0)} = 0$

   Itération 1 :

   $$x_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(0)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_2^{(0)} = 1$$
   $$x_2^{(1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(0)} = 1$$
   $$x_3^{(1)} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(1)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(1)} = -2$$
   $$\Rightarrow x^{(1)} = (1, 1, -2)$$

   Itération 2 :

   $$x_1^{(2)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_2^{(1)} = \frac{3}{2}$$
   $$x_2^{(2)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(2)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(1)} = \frac{1}{2}$$
   $$x_3^{(2)} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(2)} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(2)} = -\frac{7}{3}$$
   $$\Rightarrow x^{(2)} = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -2\right)$$

4. La méthode de Jacobi converge-t-elle ?

   Une méthode itérative de la forme $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ est dites convergente si $\left\|B^k\right\| \to 0$

   Dans la méthode de Jacobi : $B = D^{-1}(E+F)$ avec $A = \underbrace{D}_{\text{diagonal}} - (\underbrace{E}_{\text{triang. inf.}} + \underbrace{F}_{\text{triang. sup.}})$

   $\left\|B^k\right\| \leqslant \|B\|^k$ et $\|B\| \leqslant \left\|D^{-1}\right\| \|E+F\|$.

   Comme on est dans un espace à dimension finie, toute les normes sont équivalentes, Si la méthode est convergente selon une norme elle l'est selon toutes. Prenons $\|A\| = \sup |a_i j|$

   $\|D\| = \frac{1}{3}$ et $\|E+F\| = 1$

   $\Rightarrow \|B\| \leqslant \frac{1}{3} \Rightarrow \left\|B^k\right\| \leqslant \frac{1}{3^k} \to 0$ donc la méthode est convergente.

5. La méthode de Gauß-Seidel converge-t-elle ?

   Une méthode itérative de la forme $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ est dites convergente si $\left\|B^k\right\| \to 0$ Dans la méthode de Gauß-Seidel : $B = (D-E)^{-1} F$ avec $A = \underbrace{D}_{\text{diagonal}} - (\underbrace{E}_{\text{triang. inf.}} + \underbrace{F}_{\text{triang. sup.}})$

   $\left\|B^k\right\| \leqslant \|B\|^k$ et $\|B\| \leqslant \left\|(D-E)^{-1}\right\| \|F\|$.

   Comme on est dans un espace à dimension finie, toute les normes sont équivalentes, Si la méthode est convergente selon une norme elle l'est selon toutes. Prenons $\|A\| = \sup |a_i j|$

   $\left\|(D-E)^{-1}\right\| = \frac{1}{2}$ et $\|F\| = 1$

   $\Rightarrow \|B\| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \left\|B^k\right\| \leqslant \frac{1}{2^k} \to 0$ donc la méthode est convergente.

Exercice 2

1. Trouver la décomposition LU de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$

   $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$
   $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - -L_1$$
   $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 - 3L_2$$

   La matrice triangulaire supérieure qu'on obtient est notre matrice $U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   La matrice triangulaire inférieure L est obtenue par les opérations qu'on a fait sur les lignes. Les éléments diagonaux sont tous égaux à 1

   $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

   On vérifie que $LU = A$

2. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ k_1 a_1 & k_1 b_1 - 1 & c_2 \\ k_2 a_2 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

   (a) On suppose B inversible, à quelle condition supplémentaire la matrice admet-elle une décomposition LU ?

   Si tout les mineurs principaux de A sont non nuls alors A admet une décomposition LU

   On regarde les mineurs principaux de B

- $a_1 \neq 0$
- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ k_1 a_1 & k_1 b_1 - 1 \end{vmatrix} = -a_1 \neq 0$
- $\det B \neq 0$ qui est vrai car on suppose B inversible

Donc si B est inversible alors il suffit que $a_1 \neq 0$ pour que B admette une décomposition LU

(b) B admet une décomposition LU, si tout ses coefficients sont entiers alors ceux de L et de U aussi

J'ai rien vu d'astucieux donc je l'ai fait bourrin ...

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ k_1 a_1 & k_1 b_1 - 1 & c_2 \\ k_2 a_2 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & -1 & c_2 - k_1 c_1 \\ k_2 a_2 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - k_1 L_1$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & -1 & c_2 - k_1 c_1 \\ 0 & 0 & c_3 - k_2 c_1 + (b_3 - k_2 b_1)(c_2 - k_1 c_2) \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - k_2 L_1 - (k_2 b_1 - b_3) L_2$$

La matrice triangulaire supérieure qu'on obtient est notre matrice $U =$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & -1 & c_2 - k_1 c_1 \\ 0 & 0 & c_3 - k_2 c_1 + (b_3 - k_2 b_1)(c_2 - k_1 c_2) \end{pmatrix}$$

La matrice triangulaire inférieure L est obtenue par les opérations qu'on a fait sur les lignes. Les éléments diagonaux sont tous égaux à 1

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_1 & 1 & 0 \\ k_2 & k_2 b_1 - b_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients de L et de U sont obtenus par addition ou multiplication de coefficient de B, Si les éléments de B sont entiers alors ceux de L et U le sont également

Exercice 3

Flemme de tout réécrire là ... plus tard (énoncé dispo)

$$(P) : \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in [0, a] \\ y(0) = y_0 = \end{cases}$$

$$(P_2) : \begin{cases} y_{k+\frac{1}{3}} = y_k + \alpha_1 h f(x_k, y_k) \\ y_{k+\frac{2}{3}} = y_k + \alpha_2 h f\left(x_k + \frac{h}{3}, y_{k+\frac{1}{3}}\right) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{4}\left(f(x_k, y_k) + 3f\left(x_k + \frac{2h}{3}, y_{k+\frac{2}{3}}\right)\right) \end{cases} \quad , (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

1. Montrer que y, solution de (P), est de classe $\mathcal{C}^3$

   (Corollaire du) Théorème de Cauchy-Lipschitz : Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$, les solutions sont de classe $\mathcal{C}^{p+1}$

   $f \in \mathcal{C}^2$ donc $y \in \mathcal{C}^3$

   remarque : Mon chargé de TD m'a vivement conseillé de le faire tour à tour (faut voir si c'est nécessaire) :

   $f \in \mathcal{C}^{(0)} \Rightarrow y' \in \mathcal{C}^0 \Rightarrow y \in \mathcal{C}^1$

   $f \in \mathcal{C}^{(1)} \Rightarrow f' \in \mathcal{C}^{(0)} \Rightarrow y'' \in \mathcal{C}^0 \Rightarrow y \in \mathcal{C}^2$

   $f \in \mathcal{C}^{(2)} \Rightarrow f'' \in \mathcal{C}^{(0)} \Rightarrow y^{(3)} \in \mathcal{C}^0 \Rightarrow y \in \mathcal{C}^3$

2. Montrer que (P_2) est une méthode à un pas et donner l'expression de $\phi : [0, a] \times \mathbb{R} \times [0, h^*] \to \mathbb{R}$

   Une méthode est à 1 pas si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h)$

   Ici h est constant

$$y_{k+1} = y_k + h \underbrace{\frac{1}{4}\left(f(x_k, y_k) + 3f\left(x_k + \frac{2h}{3}, \underbrace{y_k + \alpha_2 h f\left(x_k + \frac{h}{3}, \underbrace{y_k + \alpha_1 h f(x_k, y_k)}_{y_{k+\frac{1}{3}}}\right)}_{y_{h+\frac{2}{3}}}\right)\right)}_{\phi(x_k, y_k, h)}$$

$$\phi(x, y, h) = \frac{1}{4}\left(f(x_k, y_k) + 3f\left(x_k + \frac{2h}{3}, y_k + \alpha_2 h f\left(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \alpha_1 h f(x_k, y_k)\right)\right)\right)$$

3. Montrer que la méthode est consistante

   Une méthode est dites consistante si $\phi(x, y, 0) = f(x, y)$

   $\phi(x, y, 0) = \frac{1}{4} f(x, y) + \frac{3}{4} f(x, y) = f(x, y)$

   QED

4. Montre que la méthode est stable. Que peut-on en déduire ?

   Pour qu'une méthode soit stable il suffit que ϕ soit lipschitzienne en espace (selon y)

   On a que f lipschitzienne en espace, notons k sont rapport de Lipschitz : $\|f(x, y) - f(x, z)\| \leqslant k \|y - z\|$

   Montrons que ϕ est alors également lipschitzienne en espace :

   $\|\phi(x, y) - \phi(x, z)\| =$

   $\left\| \frac{1}{4}\left(f(x, y) - f(x, z) + 3f\left(x + \frac{2h}{3}, y + \alpha_2 h f\left(x + \frac{h}{3}, y + \alpha_1 h f(x, y)\right)\right)\right) - 3f\left(x + \frac{2h}{3}, z + \alpha_2 h f\left(x + \frac{h}{3}, z + \right.\right.\right.$

   $\leqslant \|f(x, y) - f(x, z)\| + 3 \left\| f\left(x + \frac{2h}{3}, y + \alpha_2 h f\left(x + \frac{h}{3}, y + \alpha_1 h f(x, y)\right)\right) - f\left(x + \frac{2h}{3}, z + \alpha_2 h f\left(x + \frac{h}{3}, z + \alpha_1\right.\right.\right.$

   $\leqslant k \|y - z\| + 3 \left\| y - z + \alpha_2 h \left(f\left(x + \frac{h}{3}, y + \alpha_1 h f(x, y)\right) - f\left(x + \frac{h}{3}, y + \alpha_1 h f(x, z)\right)\right\|$

   $\leqslant (k + 3) \|y - z\| + 3 |\alpha_2| h \left\| \left(f\left(x + \frac{h}{3}, y + \alpha_1 h f(x, y)\right) - f\left(x + \frac{h}{3}, y + \alpha_1 h f(x, z)\right)\right\|$

   $\leqslant (k + 3) \|y - z\| + 3 |\alpha_2| h \|y - z + \alpha_1 h f(x, y) - f(x, z)\|$

   $\leqslant \left(k + 3 + 3|\alpha_2| h + |\alpha_1 \alpha_2| h^2 k\right) \|y - z\|$

   Donc ϕ est bien lipshitzienne en espace.

   Donc la méthode est stable.

   Stabilité et consistance entraine la convergence

   On en déduit qu'elle est convergente

5. Pour quelles valeurs de α_1 et α_2 la méthode (P_2) est-elle précise à l'ordre 2 ? 3 ?

   Dans la pratique on fait un DL de ε à l'ordre p, et une méthode est d'au moins p si les termes du DL sont nuls

   Flemme ... Coming soon