ENSIIE
2008-2009

MAN
Travaux dirigés

Examen

durée : 3 heures
aucun document n'est autorisé,
les appareils électroniques ne sont pas autorisés

Exercice 1 Effectuer la factorisation de Cholesky de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En déduire la solution de système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\beta = 1 + v^T u$ n'est pas nul. Montrer que la matrice $I_n + uv^T$ est inversible :
$$(I_n + uv^T)^{-1} = I_n - \frac{1}{\beta} uv^T.$$
2. Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$ inversible. Donner une condition qui assure que la matrice $A + uv^T$ est inversible et calculer son inverse.
3. On suppose disposer d'un programme efficace pour résoudre des systèmes linéaires de la forme $Ax = b$. Expliquer comment utiliser ce programme pour calculer la solution de systèmes linéaires de la forme $(A + uv^T)x = b$.

$x^2(x-x_1)$

$p(x) = \overset{\deg 1}{\alpha(x)}\, x(x-x_1)$

Exercice 3 On considère la formule d'intégration numérique

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq Q(f) = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x_1), \qquad (1)$$

où α_0, α_1 et $\overset{x_1}{\omega_1}$ sont des réels.

~~pour~~ $p(x)\, x(x-x_1)$

1. Montrer que l'ordre de cette formule est au maximum égal à 2.
2. Déterminer les réels α_0, α_1 et $\overset{x_1}{\omega_1}$ pour que la formule soit d'ordre le plus élevé posssible.

$$\int_0^1 x^2(x-x_1)\,dx \quad = \int_0^1 x^3 - x^2 x_1 \, dx \quad = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x_1 x}{2}\right]_0^1$$

Exercice 4 Soit f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ et p le polynôme de degré minimal qui interpole f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = \alpha$, et $x_2 = 1$, où $\alpha \in]0,1[$.

1. Déterminer par la méthode des différences divisées le polynôme p.
2. Déteminer le polynôme q obtenu en faisant tendre α vers 0 dans l'expression de p. Calculer $q'(0)$. Conclure.

Exercice 5 Soit A une matrice $n \times n$ réelle symétrique et définie positive. On s'intéresse à la résolution du problème $Ax = b$. On rappelle que

- Si les matrices A et B sont semblables ($A = P^{-1}BP$), elles ont le même rayon spectral.
- Pour tout polynôme p, les matrices A et $p(A)$ commutent.
- Si les matrices A et B commutent et si la matrice B (par exemple) est inversible alors les matrices A et B^{-1} commutent.
- Si les matrices A et B commutent et sont symétriques alors la matrice AB est symétrique.

1. On écrit la décomposition $A = D + H + V$, où $D = cI$, $c > 0$ et H et V sont deux matrices symétriques, telles que les matrices $D + H$ et $D + V$ soient inversibles. On considère la méthode itérative :

$$\begin{aligned} (D+H)x_{(k+\frac{1}{2})} &= -Vx_k + b, & (2) \\ (D+V)x_{k+1} &= -Hx_{(k+\frac{1}{2})} + b. & (3) \end{aligned}$$

   Exprimer x_{k+1} en fonction de x_k. En déduire que la suite $(x_k)_k$ converge si et seulement si :

$$\varrho\Big((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\Big) < 1.$$

2. On pose $B = D^{-1}H$, $C = D^{-1}V$.
   (a) Montrer que

$$\varrho\Big((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\Big) = \varrho\Big(B(I+B)^{-1}C(I+C)^{-1}\Big).$$

   (b) Montrer que les matrices $B(I+B)^{-1}$ et $C(I+C)^{-1}$ sont symétriques. En déduire que :

$$\varrho\Big((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\Big) \leq \varrho\Big(B(I+B)^{-1}\Big)\varrho\Big(C(I+C)^{-1}\Big).$$

3. Montrer que

$$\varrho\Big(B(I+B)^{-1}\Big) < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}I + B \quad \text{est définie positive.}$$

   En déduire que la méthode itérative (2)-(3) converge dès que les matrices $\frac{1}{2}D + H$ et $\frac{1}{2}D + V$ sont définies positives.