ENSIEE Math
Année 2009-2010

Analyse Numérique

Contrôle Terminal
Durée : 3h

Documents et appareils électroniques interdits.

Exercice 1 *Enoncer le théorème de décomposition de Cholesky.*

Exercice 2 (Résolution de systèmes linéaires) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ *et un entier* p *satisfaisant* $1 < p \leq n$. *On considère la matrice* M *de taille* $n \times n$ *définie par*

$$M_{i,i} = 1,\ i = 1, \ldots, n,\ M_{i+1,i} = 1,\ i = 1, \ldots, n-1,\ M_{1,p} = 1/2,$$

et $M_{i,j} = 0$, *sinon.*
1. *On prend* $n = 3$, $p = 2$ *puis* $p = 3$. *Donner la décomposition LU pour ces deux cas.*
2. *De manière générale, justifier que* M *admet une décomposition* LU. *Calculer le nombre total de coefficients non nuls de* L *et de* U *en fonction de* n *et* p. *Pour quelle valeur de* p *ce nombre est-il minimal ? Pour quelle valeur est-il maximal ?*

Exercice 3 *Soit* $A \in \mathcal{M}_3(I\!R)$ *la matrice définie par* $A = Id - E - F$, *avec*

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que la matrice* A *est inversible.*
2. *Soit* $0 < \omega < 2$. *Montrer que la matrice* $\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)$ *est inversible si et seulement si* $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. *On suppose que* $0 < \omega < 2$ *et* $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$. *On désire résoudre le système* $Ax = b$ *grâce à la méthode itérative suivante :*

$$\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right) x_{k+1} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right) x_k + b.$$

On pose $B = \mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)^{-1}\left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right)$. *Calculer, en fonction de* ω, *les valeurs propres de* $\mathcal{L}_\omega$, *de même que son rayon spectral.*
4. *Pour quelles valeurs de* ω *la méthode est-elle convergente ?*
5. *Déterminer* $\omega_0 \in]0, 2[$ *tel que*

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \min\{\rho(\mathcal{L}_\omega), 0 < \omega < 2 \quad \text{et} \quad \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

En quoi la connaissance de ω_0 *peut-être utile ?*