ENSIEE Math
Année 2010-2011

Analyse Numérique

Contrôle Terminal
Durée : 1h45

Documents et appareils électroniques interdits.

Partie I - Analyse numérique matricielle

Exercice 1 *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère le système suivant*

$$x_{i-1} + 4x_i + x_{i+1} = 1, \ i = 2, \dots, N-1$$

et

$$4x_1 + x_2 = 1, \ x_{N-1} + 4x_N = 1.$$

1. *On prend $N = 3$.*
1.a. *La matrice correspondant au système est-elle inversible ?*
1.b. *Résoudre le système.*
1.c. *Donner la factorisation LU de la matrice correspondante (si elle existe).*
1.d. *Donner la factorisation de Choleski de la matrice correspondante (si elle existe).*
2. *Cette fois-ci $N \geq 3$ est quelconque.*
2.a. *La matrice correspondant au système est-elle inversible ?*
2.b. *Donner la factorisation LU de la matrice correspondante (si elle existe).*
2.c. *Donner la factorisation de Cholesky de la matrice correspondante (si elle existe).*

Exercice 2 *On considère la matrice d'ordre 3 suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour cette matrice.*
2. *Vérifier que $\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J)$, où B_{GS} et B_J sont respectivement les matrices d'itération associées à la méthode de Gauss-Seidel et de Jacobi. Quelle est la méthode avec la convergence la plus rapide ?*

Partie II - Analyse numérique des équations différentielles

Soit $a > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)), \quad x \in [0, a] \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

où $f : [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, uniformément par rapport à sa première variable (*i.e.*

$\exists M > 0,\ \forall (x,y,z) \in [0,a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ |f(x,y) - f(x,z)| \leq M|y-z|$. On considère une partition uniforme de l'intervalle $[0,a]$ donnée par les points $x_k = kh$, $h = \frac{a}{N}$, $k \in \{0, \ldots, N\}$, et on note par y_k une approximation de la solution y du problème (P) au point x_k.

Exercice 3 *Question de cours On considère une méthode à un pas, donnée par une fonction ϕ, du problème (P). Donner la définition de la consistance avec (P) de cette méthode à un pas, de même qu'une condition nécessaire et suffisante de la consistance. On introduira toutes les notations nécessaires.*

Exercice 4 *Dans cet exercice, on suppose que $a = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = \lambda y$ et $y_0 = 1$.*

1. *Donner dans ce cas la solution exacte du problème (P).*
2. *En appliquant la méthode d'Euler, que l'on écrira, montrer que*

$$e^{\lambda} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

3. *On considère le schéma numérique suivant pour approcher la solution du problème (P) :*

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{lcl} y_{k+\frac{1}{3}} & = & y_k + \alpha_1 h f(x_k, y_k) \\ y_{k+\frac{2}{3}} & = & y_k + \alpha_2 h f\left(x_k + \alpha_1 h, y_{k+\frac{1}{3}}\right) \\ y_{k+1} & = & y_k + h f\left(x_k + \alpha_2 h, y_{k+\frac{2}{3}}\right) \end{array} \right.$$

   (a) *Montrer que la méthode (P_1) est une méthode à un pas et donner l'expression de la fonction $\phi : [0,1] \times \mathbb{R} \times [0, h^*] \to \mathbb{R}$ qui définit cette méthode dans le cas général (en utilisant $f(x,y) = \lambda y$).*

   (b) *Pour quelles valeurs de α_1 et α_2 le schéma (P_1) est-il d'ordre 2 ?*

   (c) *Montrer que cette méthode est stable. Que peut-on en déduire ?*