ENSIIE Math
Année 2011-2012

Analyse Numérique

Contrôle Terminal
Durée : 2h

Documents et appareils électroniques interdits.

Exercice 1 *On considère le système linéaire $Ax = b$ avec*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que A est inversible.*
2. *Appliquer la méthode de Jacobi, en prenant comme approximation initiale $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. On donnera les deux premières itérations.*
3. *Appliquer la méthode de Gauss-Seidel, en prenant comme approximation initiale $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. On donnera les deux premières itérations.*
4. *La méthode de Jacobi converge-t-elle ?*
5. *La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?*

Exercice 2
1. *Trouver la décomposition LU de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. *On considère la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ k_1 a_1 & k_1 b_1 - 1 & c_2 \\ k_2 a_1 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

2.a *On suppose que B est inversible. A quelle condition supplémentaire, la matrice admet-t-elle une décomposition LU ?*
2.b *On suppose que B admet une décomposition LU et que les coefficients $a_1, b_1, c_1, k_1, k_2, c_2, b_3, c_3$ sont tous des entiers (positifs ou négatifs). Montrer que L et U sont aussi à coefficients entiers.*

Exercice 3 *Soit $a > 0$ et $y_0 \in I\!R$. On considère le problème de Cauchy suivant :*

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & f(x, y(x)), \quad x \in [0, a] \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

où $f : [0, a] \times I\!R \to I\!R$ est une fonction deux fois dérivable sur $[0, a] \times I\!R$, lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, uniformément par rapport à sa première variable (i.e. $\exists M > 0,\ \forall (x, y, z) \in [0, a] \times I\!R \times I\!R,\ |f(x, y) -$

$f(x,z)| \leq M|y-z|$. *On considère une partition uniforme de l'intervalle* $[0,a]$ *donnée par les points* $x_k = kh$, $h = \frac{a}{N}$, $k \in \{0,\ldots,N\}$, *et on note par* y_k *une approximation de la solution* y *du problème* (P) *au point* x_k.
On utilise le schéma explicite suivant pour approcher la solution du problème (P) :

$$(P_2)\begin{cases} y_{k+\frac{1}{3}} &= y_k + \alpha_1 h f(x_k, y_k) \\ y_{k+\frac{2}{3}} &= y_k + \alpha_2 h f\left(x_k + \frac{h}{3}, y_{k+\frac{1}{3}}\right) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{4}\left(f(x_k,y_k) + 3f\left(x_k + \frac{2h}{3}, y_{k+\frac{2}{3}}\right)\right) \end{cases}$$

où α_1 *et* α_2 *sont deux paramètres réels.*

1. *Montrer que la solution* y *de* (P) *est de classe* C^3.
2. *Montrer que la méthode* (P_2) *est une méthode à un pas et donner l'expression de la fonction* $\phi : [0,a] \times I\!R \times [0,h^*] \to I\!R$ *qui définit cette méthode.*
3. *Montrer que cette méthode est consistante avec* (P).
4. *Montrer que cette méthode est stable. Que peut-on en déduire ?*
5. *Pour quelles valeurs de* α_1 *et* α_2 *le schéma est-il précis à l'ordre 2 ? A l'ordre 3 ?*