Analyse numérique
Session de Septembre

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Durée 1h30.

Analyse numérique matricielle

Exercice 1.

1. Donner la définition du conditionnement d'une matrice.
2. On note $||.||_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et sa norme subordonnée, notée de la même manière. On considère les deux matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-14} \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer $||A||_2$, $||\delta A||_2$ et $\mathrm{cond}_2(A)$, puis donner une estimation de $\frac{||\delta x||_2}{||x+\delta x||_2}$, avec x solution du système linéaire $Ax = b$ et $x + \delta x$ solution du système linéaire $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ (on suppose que b est connu).

   (b) On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{pmatrix}$. Calculer DA et $D\delta A$. Calculer $||DA||_2$, $||D\delta A||_2$ et $\mathrm{cond}_2(DA)$, puis donner une nouvelle estimation de $\frac{||\delta x||_2}{||x+\delta x||_2}$.

   (c) En justifiant votre réponse, que peut-on en conclure ?

Exercice 2. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Montrer que l'on peut appliquer la décomposition LU à la matrice A. Effectuer cette décomposition.
3. Peut-on effectuer la décomposition de Cholesky de cette matrice ? Justifier la réponse.
4. Résoudre le système $Ax = b$ avec $b = {}^t(1, 0, 1)$ en utilisant la décomposition LU trouvée ci-dessus.

Analyse numérique des équations différentielles

Soit $a > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} y'(x) &=& f(x, y(x)), \quad x \in [0,a] \\ y(0) &=& y_0 \end{array}\right.$$

où $f : [0,a]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, uniformément par rapport à sa première variable (*i.e.* $\exists M > 0,\ \forall (x,y,z) \in [0,a]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ |f(x,y) - f(x,z)| \leqslant M|y-z|$. On considère une partition uniforme de l'intervalle $[0,a]$ donnée par les points $x_k = kh$, $h = \frac{a}{N}$, $k \in \{0,\ldots,N\}$, et on note par y_k une approximation de la solution y du problème (P) au point x_k.

Exercice 3. *Question de cours*

On considère une méthode à un pas, donnée par une fonction ϕ, du problème (P). Donner la définition de la consistance avec (P) de cette méthode à un pas, de même qu'une condition nécessaire et suffisante de la consistance. On introduira toutes les notations nécessaires.

Exercice 4. Dans cet exercice, on suppose que $a = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = \lambda y$ et $y_0 = 1$.

1. Donner dans ce cas la solution exacte du problème (P).
2. En appliquant la méthode d'Euler explicite, que l'on écrira, montrer que
$$e^{\lambda} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$
3. On considère le schéma numérique suivant pour approcher la solution du problème (P) :
$$(P_1)\left\{\begin{array}{rcl} y_{k+\frac{1}{3}} &=& y_k + \alpha_1 h f(x_k, y_k) \\ y_{k+\frac{2}{3}} &=& y_k + \alpha_2 h f\left(x_k + \alpha_1 h, y_{k+\frac{1}{3}}\right) \\ y_{k+1} &=& y_k + h f\left(x_k + \alpha_2 h, y_{k+\frac{2}{3}}\right) \end{array}\right.$$
   (a) Montrer que la méthode (P_1) est une méthode à un pas et donner l'expression de la fonction $\phi : [0,1]\times\mathbb{R}\times[0,h^*] \to \mathbb{R}$ qui définit cette méthode dans le cas général (sans utiliser $f(x,y) = \lambda y$).
   (b) Pour quelles valeurs de α_1 et α_2 le schéma (P_1) est-il d'ordre 2 ?
   (c) Montrer que cette méthode est stable. Que peut-on en déduire ?
   (d) On se place maintenant dans le cas où $f(x,y) = \lambda y$. On pose $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. On pose $\overline{h} = \lambda h$.
      i. Déterminer la fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $y_{k+1} = p(\overline{h})y_k$.
      ii. Déterminer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $y(x_{k+1}) = g(\overline{h})y(x_k)$.
      iii. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y(x_k) = y_k$. En déduire que
      $$y(x_{k+1}) - y_{k+1} = O(h^4).$$
      (on considèrera un développement en série entière de g en 0). Interpréter ce résultat par rapport à l'ordre du schéma.