Analyse numérique
Session de Rattrapage

Les documents et appareils électroniques sont interdits.
Durée 1h45.

Analyse numérique matricielle

Exercice 1. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Que se passe-t-il lorsqu'on essaie d'effectuer la décomposition LU de la matrice A ?
2. Déterminer la matrice P telle que

$$B = PA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Effectuer la décomposition LU de la matrice B.
4. Vérifier que l'on peut décomposer la matrie B en décomposition LU, puis, en utilisant cette décomposition, résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & z & = & -2 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & -7 \end{array} \right.$$

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$

1. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle définie positive ?
2. Enoncer le théorème de convergence des méthodes itératives.

3. Donner la valeur de la matrice d'itération J de la méthode de Jacobi. Pour quelles valeurs de α la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
4. Donner la valeur de la matrice d'itération $\mathcal{L}_1$ de la méthode de Gauss-Seidel. Pour quelles valeurs de α la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?
5. Donner, en fonction de α, la valeur de la vitesse de convergence asymptotique de chacune de ces deux méthodes.

Analyse numérique des équations différentielles

On utilisera les notations suivantes dans les exercices 1, 2 et 3.
Soit $a > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} y'(x) & = & f(x, y(x)), \quad x \in [0, a] \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

où $f : [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, uniformément par rapport à sa première variable (*i.e.* $\exists M > 0$, $\forall (x, y, z) \in [0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant M|y - z|$. On considère une partition uniforme de l'intervalle $[0, a]$ donnée par les points $x_k = kh$, $h = \frac{a}{N}$, $k \in \{0, \dots, N\}$, et on note par y_k une approximation de la solution y du problème (P) au point x_k. On suppose aussi que $h \leqslant 1$.

Exercice 3. *Question de cours*
On considère une méthode à un pas, donnée par une fonction ϕ, du problème (P). Donner la définition de l'ordre de cette méthode à un pas. On introduira toutes les notations nécessaires.

Exercice 4. On considère le problème (P) et on se fixe quatre nombres réels a_1, a_2, b_1 et b_2 quelconques, $c \in [0, 1]$, et la fonction ϕ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \phi(x, y, h) & = & b_1 f(x, y) + b_2 f(x + ch, y^*) \\ y^* & = & y + h\left(a_1 f(x, y) + a_2 f(x + ch, y^*)\right). \end{array}$$

L'approximation y_k est, dans cette exercice, donnée par la méthode à un pas définie par la fonction ϕ.

1. Pour quelles valeurs de (a_1, a_2, b_1, b_2) la méthode à un pas est-elle explicite ?
2. Pour quelles valeurs de (a_1, a_2, b_1, b_2) retrouve-t-on la méthode d'Euler explicite ? La méthode d'Euler implicite ?
3. On suppose que $a_2 = 0$.
   (a) Ecrire le schéma obtenu.
   (b) Le schéma est-il stable ? Justifier votre réponse.
   (c) Pour quelles valeurs de (a_1, b_1, b_2, c) le schéma est-il consistant ?
   (d) Pour quelles valeurs de (a_1, b_1, b_2, c) le schéma est-il d'ordre 2 ?
4. On revient au cas général (a_2 quelconque). Cette méthode est de type Runge-Kutta. En donner la représentation matricielle.