ENSIIE Math
Année 2012-2013

Analyse Numérique

Contrôle Terminal
Durée : 1h45

Documents et appareils électroniques interdits.
Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.

Analyse numérique matricielle

Exercice 1 *On considère la matrice de taille $N \geq 2$ suivante*

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est composée de 1 pour tous les termes sauf sur les $N-1$ premiers termes diagonaux où les termes valent 2.

1. *On prend $N = 4$. La matrice s'écrit donc*

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.a *Effectuer la décomposition LU de A_4.*
1.b *Calculer A_4^{-1}.*
1.c *Effectuer la décomposition LU de A_4^{-1}.*
2. *Reprendre les questions dans le cas général, c'est-à dire pour $N \geq 2$ quelconque.*
3. *Soit $b \in \mathbb{R}^N$. On cherche x tel que*

$$A_N x = b.$$

3.a *Donner un algorithme qui utilise la décomposition LU de A_N pour calculer x et donner un ordre de grandeur du nombre d'opérations en fonction de N (une opération correspond à une addition/soustraction ou multiplication/division).*
3.b *Donner un autre algorithme qui utilise la décomposition LU de A_N^{-1} pour calculer x et donner un ordre de grandeur du nombre d'opérations en fonction de N.*
3.c *Quel est l'algorithme le plus efficace ?*
4 *Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Proposer un algorithme qui calcule $y = A_N x$ et calculer le nombre d'opérations. Moins il y aura d'opérations et mieux cela sera !*

Exercice 2 *Soit A la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Pourquoi est-ce que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent-elles ?*
2. *Calculer les rayons spectraux de ces deux méthodes. Les comparer.*

Analyse numérique des équations différentielles

On utilisera les notations suivantes dans les exercices 3 et 4.
Soit $a > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) & = & f(x, y(x)), \quad x \in [0, a] \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

où $f : [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, uniformément par rapport à sa première variable. On considère une partition uniforme de l'intervalle $[0, a]$ donnée par les points $x_k = kh$, $h \leqslant 1$, $h = \frac{a}{N}$, $k \in \{0, \ldots, N\}$, et on note par y_k une approximation de la solution y du problème (P) au point x_k, méthode à un pas définie par $y_{k+1} = y_k + h\phi(x_k, y_k, h)$, ϕ étant une fonction continue sur $[0, a] \times \mathbb{R} \times [0, 1]$.

Exercice 3 *Question de cours*

On considère une méthode à un pas, donnée par une fonction ϕ, du problème (P). Donner la définition de l'ordre de cette méthode à un pas. On introduira toutes les notations nécessaires.

Exercice 4 *On considère le problème (P) et on se fixe quatre nombres réels a_1, a_2, b_1 et b_2 quelconques, $c \in]0, 1[$, et la fonction ϕ suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \phi(x, y, h) & = & b_1 f(x, y) + b_2 f(x + ch, y^*) \\ y^* & = & y + h\left(a_1 f(x, y) + a_2 f(x + ch, y^*)\right). \end{array}$$

L'approximation y_k est définie par la fonction ϕ ci-dessus.

1. *Pour quelles valeurs de (a_1, a_2, b_1, b_2) la méthode à un pas est-elle explicite ?*
2. *Pour quelles valeurs de (a_1, a_2, b_1, b_2) retrouve-t-on la méthode d'Euler explicite ? La méthode d'Euler implicite ?*
3. *On suppose que $a_2 = 0$.*
   (a) *Ecrire le schéma obtenu.*
   (b) *Pour quelles valeurs de (a_1, b_1, b_2, c) le schéma est-il convergent ?*
   (c) *Pour quelles valeurs de (a_1, b_1, b_2, c) le schéma est-il d'ordre 2 ?*
4. *On revient au cas général (a_2 quelconque). Cette méthode est de type Runge-Kutta. En donner la représentation matricielle.*