

Analyse numérique

Les documents et appareils électroniques sont interdits.

Durée 1h45.

Analyse numérique matricielle

Exercice 1.

1. Donner la définition du conditionnement d'une matrice.
2. On note  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$  et sa norme subordonnée, notée de la même manière. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta A = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-14} \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer  $\|A\|_2$ ,  $\|\delta A\|_2$  et  $\text{cond}_2(A)$ , puis donner une majoration de  $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2}$ , avec  $x$  solution du système linéaire  $Ax = b$  et  $x + \delta x$  solution du système linéaire  $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$  (on suppose que  $b$  est connu).
- (b) On pose  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^6 \end{pmatrix}$ . Calculer  $DA$  et  $D\delta A$ . Calculer  $\|DA\|_2$ ,  $\|D\delta A\|_2$  et  $\text{cond}_2(DA)$ , puis donner une nouvelle majoration de  $\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2}$ .
- (c) En justifiant votre réponse, que peut-on en conclure ?

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice  $A$  est inversible.
2. Montrer que l'on peut appliquer la décomposition  $LU$  à la matrice  $A$ . Effectuer cette décomposition.
3. Peut-on effectuer la décomposition de Cholesky de cette matrice ? Justifier la réponse.
4. Résoudre le système  $Ax = b$  avec  $b = {}^t(1,0,1)$  en utilisant la décomposition  $LU$  trouvée ci-dessus.

## Analyse numérique des équations différentielles

Soit  $a > 0$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ . On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [0, a] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où  $f : [0, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, uniformément par rapport à sa première variable (i.e.  $\exists M > 0, \forall (x, y, z) \in [0, a] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |f(x, y) - f(x, z)| \leq M|y - z|$ ). On considère une partition uniforme de l'intervalle  $[0, a]$  donnée par les points  $x_k = kh$ ,  $h = \frac{a}{N}$ ,  $k \in \{0, \dots, N\}$ , et on note par  $y_k$  une approximation de la solution  $y$  du problème (P) au point  $x_k$ .

### Exercice 3. Question de cours

On considère une méthode à un pas, donnée par une fonction  $\phi$ , approchant la solution du problème (P). Donner la définition de la consistance avec (P) de cette méthode à un pas, de même qu'une condition nécessaire et suffisante de la consistance. On introduira toutes les notations nécessaires.

**Exercice 4.** Dans cet exercice, on suppose que  $a = 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \lambda y$  et  $y_0 = 1$ , sauf questions 3 (a), 3 (b) et 3 (c) où  $f$  est quelconque.

1. Donner dans ce cas la solution exacte du problème (P).
2. En appliquant la méthode d'Euler explicite, que l'on écrira, montrer que

$$e^\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

3. On suppose que  $f$  est quelconque sauf question 3 (d). On considère le schéma numérique suivant pour approcher la solution du problème (P) :

$$(P_1) \begin{cases} y_{k+\frac{1}{3}} = y_k + \alpha_1 h f(x_k, y_k) \\ y_{k+\frac{2}{3}} = y_k + \alpha_2 h f(x_k + \alpha_1 h, y_{k+\frac{1}{3}}) \\ y_{k+1} = y_k + h f(x_k + \alpha_2 h, y_{k+\frac{2}{3}}) \end{cases}$$

- (a) Montrer que la méthode (P<sub>1</sub>) est une méthode à un pas et donner l'expression de la fonction  $\phi : [0, 1] \times \mathbb{R} \times [0, h^*] \rightarrow \mathbb{R}$  qui définit cette méthode dans le cas général (sans utiliser  $f(x, y) = \lambda y$ ).
- (b) Pour quelles valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  le schéma (P<sub>1</sub>) est-il d'ordre 2 ?
- (c) Montrer que cette méthode est stable. Que peut-on en déduire ?
- (d) On se place maintenant dans le cas où  $f(x, y) = \lambda y$ . On pose  $\alpha_1 = \frac{1}{3}$  et  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ . On pose  $\bar{h} = \lambda h$ .

- i. Déterminer la fonction  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $y_{k+1} = p(\bar{h})y_k$ .
- ii. Déterminer la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $y(x_{k+1}) = g(\bar{h})y(x_k)$ .
- iii. On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $y(x_k) = y_k$ . En déduire que

$$y(x_{k+1}) - y_{k+1} = O(h^4).$$

(on considèrera un développement en série entière de  $g$  en 0). Interpréter ce résultat par rapport à l'ordre du schéma.