Examen (21 mai 2014)

Durée : 1h45. Aucun document autorisé (les traducteurs électroniques sont autorisés pour les étudiants bénéficiant d'un temps supplémentaire).

Les règles de la déduction naturelle et de la résolution sont rappelées en fin de sujet. Toutes les règles ne sont pas forcément utiles pour ce sujet.

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Vous pouvez, si nécessaire, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

Certaines questions sont signalées comme plus difficiles. Il vous est fortement conseillé de les traiter en dernier.

Une correction succincte sera disponible à partir du jeudi 22 mai 2014 à l'adresse `http://www.ensiie.fr/~forest/MLO`.

Vous veillerez à la clarté de votre rédaction et à la lisibilité de vos preuves.

Exercice 1 Induction

Pour tout ensemble (fini) A, un *mot* sur A est une suite finie d'éléments de A. On définit l'opération de *concaténation* sur les mots de A comme étant : $u.v$ est la suite u suivie de la suite v. On note ϵ la suite vide (le mot sans lettre). On note A^* l'ensemble des mots sur A.

Soit $V = \{(,),[,]\}$ (i.e. l'ensemble composé des parenthèses ouvrantes et fermentes et des crochets ouvrants et fermants). On définit l'ensemble X comme suit :

- ϵ appartient à X,
- Si les mots u et v sont dans X alors le mot $u[v]$ est dans X,
- Si les mots u et v sont dans X alors le mot $u(v)$ est dans X.

Question 1 : Monter que les mots $[]$, $[]()$ et $[()[]()]$ sont dans X.

Correction :

1. $[] = \epsilon[\epsilon] \in X$ car $\epsilon \in X$;
2. $[]() = [](\epsilon) \in X$ car $[] \in X$ et $\epsilon \in X$;
3. Puisque $[]() \in X$ et $\epsilon \in X$, on a $()[]() \in X$ et donc $[()[]()] = \epsilon[()[]()] \in X$.

Question 2 : Grâce à une propriété remarquable sur la longueur des mots appartenant à X que vous énoncerez et démonterez clairement, montrer que $[)]$, $([()]$ et $([(([[(([()])])])])]$ n'appartiennent pas à X.

Correction : Soit P la propriété sur les mots "$P(u) =_{def}$ u est de longueur paire". On montre que P est satisfaite sur tous les éléments de X par induction sur la définition de X.

- $P(\epsilon)$ est bien vérifiée puisque ϵ est de longueur 0 ;
- Si u et v sont des éléments de X de longueur paire (vérifiant P), alors $u[v]$ est également de longueur paire (somme des longueurs de u et v +2) donc P est vérifiée pour $u[v]$.
- Idem pour le cas $u(v)$

Exercice 2 Logique propositionnelle : modélisation

On considère les énoncés suivants :

1. Si Bill rate son examen alors Bill sera déprimé.
2. S'il fait beau alors Bill ira à la piscine.
3. À la piscine, Bill ne travaille pas.
4. Bill ratera son examen s'il ne travaille pas.

5. Si Bill ne va pas à la piscine il sera déprimé.

Question 1 : Modéliser le problème en logique propositionnelle.
Correction :

1. $R \Rightarrow D$
2. $B \Rightarrow P$
3. $P \Rightarrow \neg T$
4. $\neg T \Rightarrow R$
5. $\neg P \Rightarrow D$

Question 2 : À l'aide d'une méthode sémantique montrer que Bill sera déprimé.
Correction : Soit I une interprétation qui satisfait chacune de ces formules montrons que $I(D) = 1$. Considérons $I(P)$.

1. Si $I(P) = 0$ alors $I(\neg P) = 1$ donc $I(D) = 1$.
2. Sinon $I(P) = 1$. Alors $I(\neg T) = 1$ donc $I(R) = 1$ donc $I(D) = 1$.

Exercice 3 Logique propositionnelle : déduction naturelle

Donner une démonstration en déduction naturelle de chacun des séquents suivants :

1. $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
2. $\neg\neg A, \Gamma \vdash A$
3. $\neg A \vdash A \Rightarrow B$
4. $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$
5. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B) \Rightarrow C$
6. $\vdash ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg C) \Rightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)))$ (Attention : difficile)

Correction :

1.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow B}\,ax \quad \dfrac{}{A, A \Rightarrow B \vdash A}\,ax}{A, A \Rightarrow B \vdash B}\,\Rightarrow_e}{A \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow B}\,\Rightarrow_i}{\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B}\,\Rightarrow_i$$

2.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A, \neg\neg A, \Gamma \vdash \neg A}\,ax \quad \dfrac{}{\neg A, \neg\neg A, \Gamma \vdash \neg\neg A}\,ax}{\neg A, \neg\neg A, \Gamma \vdash \bot}\,\neg_e}{\neg\neg A, \Gamma \vdash A}\,\bot_c$$

3.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B, A, \neg A \vdash A}\,ax \quad \dfrac{}{\neg B, A, \neg A \vdash \neg A}\,ax}{\neg B, A, \neg A \vdash \bot}\,\neg_e}{A, \neg A \vdash B}\,\bot_c}{\neg A \vdash A \Rightarrow B}\,\Rightarrow_i$$

4.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,ax}{A \vdash (B \Rightarrow A)}\,\Rightarrow_i}{A \vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)}\,\vee_i^d \quad \dfrac{\dfrac{\text{cf point 3}}{\neg A \vdash (A \Rightarrow B)}}{\neg A \vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)}\,\vee_i^g}{\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)}\,t.e.$$

5.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \lor B \vdash A \lor B}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash B \Rightarrow C}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash A \Rightarrow B}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash A}\,ax}{\Gamma_1 \vdash B}\Rightarrow_e}{\underbrace{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \lor B, A}_{\Gamma_1} \vdash C}\Rightarrow_e \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_2 \vdash B \Rightarrow C}\,ax \quad \dfrac{}{\Gamma_2 \vdash B}\,ax}{\underbrace{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \lor B, B}_{\Gamma_2} \vdash C}\Rightarrow_e}{\dfrac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \lor B \vdash C}{\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \lor B) \Rightarrow C}\Rightarrow_i *3}\lor_e$$

6.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A \land B) \Rightarrow C, \neg C, \neg A \vdash \neg A}\,ax}{(A \land B) \Rightarrow C, \neg C, \neg A \vdash \neg A \lor \neg B}\lor_i^g \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg B, \Gamma \vdash \neg C}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg\neg B, \Gamma \vdash (A \land B) \Rightarrow C}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg\neg B, \Gamma \vdash A}\,ax \quad \dfrac{\text{point 2.}}{\neg\neg B, \Gamma \vdash B}}{\neg\neg B, \Gamma \vdash (A \land B)}\land_i}{\neg\neg B, \Gamma \vdash C}\Rightarrow_e}{\neg\neg B, \Gamma \vdash \bot}\neg_e}{\Gamma \vdash \neg B}\bot_c}{\underbrace{(A \land B) \Rightarrow C, \neg C, A}_{\Gamma} \vdash \neg A \lor \neg B}\lor_i^d}{(A \land B) \Rightarrow C, \neg C \vdash (\neg A) \lor (\neg B)}t.e.}{\dfrac{(A \land B) \Rightarrow C \vdash (\neg C) \Rightarrow ((\neg A) \lor (\neg B))}{\vdash ((A \land B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((\neg C) \Rightarrow ((\neg A) \lor (\neg B)))}\Rightarrow_i}\Rightarrow_i$$

Exercice 4 Logique du premier ordre : déduction naturelle

Le monde se divise en deux catégories : ceux qui ont un pistolet (chargé bien entendu) et ceux qui creusent. Nul ne possède à la fois une pelle et un pistolet. Toute personne possédant un pistolet ne creuse pas. Toute personne possédant une pelle fait creuser toute personne ne possédant pas de pistolet. Toute personne possédant un pistolet fait creuser toute personne ne possédant pas de pistolet.

Question 1 : Formaliser le monde ci-dessus décrit en logique du premier ordre.

Correction : Il nous faut trois symboles de relations unaires : Pel (posséder une pelle), Pis (posséder un pistolet) et Cr (creuser).

On a alors les formules suivantes :

$$\Gamma = \begin{cases} \forall x, Cr(x) \lor Pis(x) \\ \neg\exists x, Pel(x) \land Pis(x) \\ \forall x, Pis(x) \Rightarrow \neg Cr(x) \\ \forall x \forall y, Pel(x) \Rightarrow \neg Pis(y) \Rightarrow Cr(y) \\ \forall x \forall y, Pis(x) \Rightarrow \neg Pis(y) \Rightarrow Cr(y) \end{cases}$$

Question 2 : Montrer, à l'aide de la déduction naturelle, que toute personne possédant une pelle ne possède pas de pistolet.

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash Pel(x)}\,ax \quad \dfrac{}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash Pis(x)}\land_i}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash Pel(x) \land Pis(x)}\land_i}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash \exists x, \underbrace{(Pel(x) \land Pis(x))}_{F}}\exists_i \quad \dfrac{\text{cf question 2}}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash \neg\exists x, F}}{Pel(x), Pis(x), \Gamma \vdash \bot}\neg_i}{Pel(x), \Gamma \vdash \neg Pis(x)}\neg_i}{\dfrac{\Gamma \vdash Pel(x) \Rightarrow \neg Pis(x)}{\Gamma \vdash \forall x, Pel(x) \Rightarrow \neg Pis(x)}\forall_i}\Rightarrow_i$$

Question 3 : Montrer que toute personne possédant une pelle creuse. (Attention assez difficile. Il est très important que vous ayez une preuve informelle **AVANT** de vous lancer dans la preuve formelle). Une preuve en français rapporte également des points.

Correction :

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash \forall x, Cr(x) \vee Pis(x)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash Cr(x) \vee Pis(x)}\,\forall_e
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{Cr(x), \Gamma_1 \vdash Cr(x)}\,ax \quad \dfrac{}{Cr(x), \Gamma_1 \vdash \neg Cr(x)}\,ax}{Cr(x), \Gamma_1 \vdash \bot}\,\neg_e
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash \neg \exists x, Pel(x) \wedge Pis(x)}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash Pel(x)}\,ax \quad \dfrac{}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash Pis(x)}\,ax}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash Pel(x) \wedge Pis(x)}\,\wedge_i}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash \exists x, Pel(x) \wedge Pis(x)}\,\exists_i}{Pis(x), \Gamma_1 \vdash \bot}\,\neg_e
}{\underbrace{\neg Cr(x), Pel(x), \Gamma}_{\Gamma_1} \vdash \bot}\,\vee_e
}{Pel(x), \Gamma \vdash Cr(x)}\,\bot_c
}{\Gamma \vdash Pel(x) \Rightarrow Cr(x)}\,\Rightarrow_i
}{\Gamma \vdash \forall x, Pel(x) \Rightarrow Cr(x)}\,\forall_i
$$

Question 4 : Montrer à l'aide de la déduction naturelle que si une personne au moins possède une pelle et si une personne au moins ne possède pas de pelle alors il existe une personne qui creuse.

Correction :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{cf question 3}}{\Gamma_1 \vdash \forall x, Pel(x) \Rightarrow Cr(x)}}{\Gamma_1 \vdash Pel(x) \Rightarrow Cr(x)}\,\forall_e \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash Pel(x)}\,ax}{\Gamma_1 \vdash Cr(x)}\,\Rightarrow_e}{\underbrace{Pel(x); \Gamma}_{\Gamma_1} \vdash \exists z, Cr(z)}\,\exists_i}{Pel(x); \forall y; \neg Pel(y); \Gamma \vdash \exists z, Cr(z)}\,aff}{\exists x, Pel(x); \exists y, \neg Pel(y); \Gamma \vdash \exists z, Cr(z)}\,\exists_g$$

Exercice 5 Logique du premier ordre : résolution

Démontrer la validité de la formule F suivante en utilisant la résolution.

$$((\exists x, A(x)) \vee (\exists x, B(x))) \Rightarrow (\exists x(A(x) \vee B(x)))$$

Correction : F valide ssi $((\exists x, A(x)) \vee (\exists x, B(x))) \models (\exists x(A(x) \vee B(x)))$ ssi $\Sigma = \{\neg\exists x(A(x) \vee B(x)); ((\exists x, A(x)) \vee (\exists x, B(x)))\}$ contradictoire.

$$\overset{c}{\Sigma} = \{A(C_x) \vee B(C_y); \neg A(x); \neg B(x)\}$$

$$\dfrac{\dfrac{(A(C_x)) \vee (B(C_y)) \quad \neg B(x)}{A(C_x)}\; x := C_y \qquad \neg A(x)}{\emptyset}\; x := C_x$$

RÈGLES DE LA DÉDUCTION NATURELLE

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}\ (ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_c)$$

FIGURE 1 – Logique propositionnelle et du premier ordre

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \text{non libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x, A}\ (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x, A}\ (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x, A \quad \Gamma, A \vdash B \quad x \text{ non libre dans } \Gamma, \text{ ni dans } B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists_e)$$

FIGURE 2 – Logique du premier ordre

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}\ (=_e)$$

FIGURE 3 – Extension pour les langages avec égalité

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \; ax2$$

$$\frac{}{\Gamma, A, \neg A \vdash \bot} \; (\neg_g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \; (contr)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \; (t.e.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A} \; (Pierce)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Sigma \vdash A} \; (Aff_{gen})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash B \quad \text{x non libre dans } \Gamma, B}{\exists x, A, \Gamma \vdash B} \; \exists_g$$

FIGURE 4 – Règles dérivables autorisées à l'utilisation *sans démonstration*

RÈGLES DE LA RÉSOLUTION

$$\frac{A_1 \vee C_1 \quad \neg A_2 \vee C_2}{C_1\sigma \bigvee C_2\sigma} \; A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee C}{A_1\sigma \vee C\sigma} \; A_1\sigma = A_2\sigma$$

$$\frac{\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee C}{\neg A_1\sigma \vee C\sigma} \; A_1\sigma = A_2\sigma$$

FIGURE 5 – Règles de la résolution