Exercice : constitution d'un porte-feuille de titres

On suppose que l'on a sélectionné sur le marché n titres T_i , i=1 à n. Chaque titre a un rendement r_i. r_i est une variable aléatoire dont la moyenne $E(r_i)$ et la variance $V(r_i)$ ont été déterminées par une étude statistique. On sait aussi que les r_i sont des v.a. indépendantes les unes des autres.

On veut constituer un porte-feuille de titres en prenant une proportion de chacun de ces titres. Par exemple supposons 3 titres T_1, T_2, T_3. Dans le porte-feuille on peut décider de mettre ¼ de T_1, ¼ de T_2 et ½ de T_3. Cela signifie que si l'on investit par exemple 1000 Euros dans le porte-feuille, on achètera 250 Euros de T_1, 250 Euros de T_2 et 500 Euros de T_3. Ce que rapporte le portefeuille est alors $250r_1+250r_2+500r_3 = 1000\times(¼\,r_1+ ¼\,r_2 + ½\,r_3)$. En désignant par R le rendement du porte-feuille, on peut poser $R = ¼\,r_1 + ¼\,r_2 + ½\,r_3$.

Le rendement du porte-feuille est lui aussi une variable aléatoire composée d'une combinaison linéaire des v.a. r_i. Par exemple le rendement du porte-feuille précédent est donné par $R = ¼\,r_1 + ¼\,r_2 + ½\,r_3$.

L'enjeu est de constituer un porte-feuille optimal vis-à-vis du risque, mais garantissant un rendement moyen ρ fixé. Le risque est mesuré par la variance du porte-feuille. Rappelons que la variance est la moyenne des écarts (au carré) par rapport à la valeur moyenne. Donc plus la variance est petite et plus le porte-feuille a des chances de rapporter son rendement moyen.

On introduit les variables x_i i=1 à n, représentant la proportion de titre T_i choisie ($0\leq x_i\leq 1$). Le rendement du porte-feuille est donc $R=\Sigma_{i=1,n}\, x_i r_i$. La valeur moyenne du rendement du porte-feuille est $E(R)=\Sigma_{i=1,n}\, x_i E(r_i)$ et sa variance est $V(R)=\Sigma_{i=1,n}\, (x_i)^2 V(r_i)$, les r_i étant des v.a. indépendantes deux à deux il n'y a pas de terme de la forme $x_i x_j$.

Le problème que l'on a à résoudre est donc :

minimiser $\quad f(x) = \Sigma_{i=1,n}\, (x_i)^2 V(r_i)$

sous les contraintes

$$-\Sigma_{i=1,n}\, x_i E(r_i)+\rho\leq 0 \qquad (1)$$

$$-\Sigma_{i=1,n}\, x_i+1=0 \qquad (2)$$

$$-x_i\leq 0 \quad i=1 \text{ à } n \qquad (3)$$

On note S l'ensemble des solutions des conditions (1), (2), (3).

On considère maintenant le cas suivant.

n=3, ρ=3%,

i	1	2	3
$V(r_i)$	5	12	8
$E(r_i)$ en %	3	4	2

1) Ecrire le programme mathématique modélisant le problème.

2) On considère le porte-feuille défini par $x_1= {}^2/_3$, $x_2= {}^1/_6$, $x_3= {}^1/_6$.

Que vaut la variance de ce porte-feuille ?

On note x le point de coordonnées $x_1= {}^2/_3$, $x_2= {}^1/_6$, $x_3= {}^1/_6$. Montrer que ce point est qualifié. Vérifie-t-il les conditions de Kühn-Tücker ?

Donner le système de contraintes linéaires décrivant $T(S,x)$ le cône tangent à S en x. Exhiber un vecteur de ce cône tangent qui ne satisfait pas la condition nécessaire du premier ordre.

3) Montrer que pour ce problème les conditions de Kühn-Tücker sont des conditions suffisantes d'optimalité.

Résoudre les conditions de Kühn-Tücker en considérant les solutions telles que $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$. Donner la constitution du porte-feuille optimal et calculer sa variance.

Indication : $\begin{pmatrix} \frac{109}{60} & \frac{71}{120} \\ \frac{71}{120} & \frac{49}{240} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{49}{2} & -71 \\ -71 & 218 \end{pmatrix}$

Correction portefeuille de titres.

1) min $f(x) = 5x_1^2 + 12x_2^2 + 8x_3^2$ s.c. $-3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3 \leq 0$ (1)

$-x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0$ (2)

$-x_1 \leq 0,\ -x_2 \leq 0,\ -x_3 \leq 0$ (3)

2) $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = x_3 = \frac{1}{6} \Rightarrow f(x) = 5 \times \frac{4}{9} + 12 \times \frac{1}{36} + 8 \times \frac{1}{36} = \frac{20}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9} = \frac{25}{9}$

$+3 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 3$ (1) est saturée, $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$ (2) est bien vérifiée

$\frac{2}{3}, \frac{1}{6} > 0$ donc aucune des (3) n'est saturée

notons $\left| \begin{array}{ll} g(x) \leq 0 & (1) \\ h(x) = 0 & (2) \end{array} \right.$ alors $\nabla g = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\nabla h = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc la qualification de l'indépendance linéaire est satisfaite.

conditions K.T. $\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 10x_1 \\ 24x_2 \\ 16x_3 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\ \text{avec } \nu \geq 0. \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{ll} \frac{20}{3} - 3\nu - \mu = 0 & a) \\ \frac{24}{6} - 4\nu - \mu = 0 & b) \\ \frac{16}{6} - 2\nu - \mu = 0 & c) \end{array}$ $\Big\}$ a) − b) $\to \frac{20}{3} - \frac{12}{3} + \nu = 0 \Rightarrow \nu = -\frac{8}{3}$ impossible

$T(S,x) = \left\{ y : \begin{array}{l} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{array} \right\} \supset \left\{ y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} : y_1 \in \mathbb{R} \right\}$ prenons $y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ $\nabla f(x) \cdot y = -\frac{20}{3} + \frac{12}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = (-20 + 6 + 4) \times \frac{1}{3} = -\frac{10}{3} < 0$

3) Les contraintes d'inégalités (1) et (3) sont affines donc convexes.
La contrainte d'égalité (2) est affine.
f est convexe car son hessien vaut $\begin{bmatrix} 10 & & 0 \\ & 24 & \\ 0 & & 16 \end{bmatrix}$ qui est défini-positif.
donc par th du cours les conditions de K.T. sont suffisantes pour l'optimalité globale.

on cherche des solutions t.q. $x_1, x_2, x_3 > 0$

<u>cas 1</u> : $\nu = 0$ K.T $\to \left\{ \begin{array}{l} 10x_1 = \mu \\ 24x_2 = \mu \\ 16x_3 = \mu \end{array} \right.$ $\begin{array}{l} (2) \to \mu\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16}\right) = 1 \\ (1) \to \mu\left(\frac{3}{10} + \frac{4}{24} + \frac{2}{16}\right) \geq 3 \Rightarrow \mu\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right) \geq 1 \end{array}$ $\Big\} \Rightarrow \mu\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24}\right) \geq \mu\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16}\right)$

<u>impossible</u> sauf si $\mu = 0$
mais $\mu = 0$ est impossible pour 1) et 2)

<u>cas 2</u> : $\nu > 0 \Rightarrow$ (1) est saturée

K.T $\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - 3\nu - \mu = 0 \\ 24x_2 - 4\nu - \mu = 0 \\ 16x_3 - 2\nu - \mu = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right.$ $\to$ $\begin{array}{l} x_1 = (3\nu + \mu)\frac{1}{10} \\ x_2 = (4\nu + \mu)\frac{1}{24} \\ x_3 = (2\nu + \mu) \times \frac{1}{16} \end{array}$

$\frac{3}{10}(3\nu + \mu) + \frac{1}{6}(4\nu + \mu) + \frac{1}{8}(2\nu + \mu) = 3 \to \nu\left(\frac{9}{10} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \mu\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = 3$

$\frac{1}{10}(3\nu + \mu) + \frac{1}{24}(4\nu + \mu) + \frac{1}{16}(2\nu + \mu) = 1 \to \nu\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + \mu\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16}\right) = 1$

calcul des PPCM : $\left.\begin{array}{l} 10 = 5 \times 2 \\ 3 \\ 4 = 2 \times 2 \end{array}\right\} \to 5 \times 2 \times 2 \times 3$ | $\left.\begin{array}{l} 10 = 5 \times 2 \\ 6 = 2 \times 3 \\ 8 = 2 \times 2 \times 2 \end{array}\right\} \to 5 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2$ | $\left.\begin{array}{l} 10 = 5 \times 2 \\ 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \end{array}\right\} \to 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$\frac{9}{10} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{9 \times 6 + 2 \times 20 + 15}{60} = \frac{109}{60}$ | $\frac{3}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{3 \times 12 + 20 + 15}{120} = \frac{71}{120}$ | $\frac{1}{10} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16} = \frac{24 + 10 + 15}{240} = \frac{49}{240}$

$\left\{ \begin{array}{l} \nu \frac{109}{60} + \mu \frac{71}{120} = 3 \\ \nu \frac{71}{120} + \mu \frac{49}{240} = 1 \end{array} \right.$ $\begin{bmatrix} \frac{109}{60} & \frac{71}{120} \\ \frac{71}{120} & \frac{49}{240} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{6}{15} \begin{bmatrix} \frac{49}{2} & -71 \\ -71 & 2 \times 109 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} \nu \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{6}{15} \begin{bmatrix} \frac{49}{2} & -71 \\ -71 & 2 \times 109 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{6}{15} \begin{bmatrix} 3 \times \frac{49}{2} - 71 \\ -3 \times 71 + 2 \times 109 \end{bmatrix} = \frac{6}{15} \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\left| \begin{array}{l} \nu = 1 \\ \mu = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{1}{4} \end{array}}$ <u>valeur de la variance</u> : $5 \times \frac{1}{4} + 12 \times \frac{1}{4 \times 4} + \frac{8}{4 \times 4} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5 < \frac{25}{9}$ variance de la solution précédente

Soit n titres $T_1, \dots, T_n$. Chaque titre a un rendement r_i. r_i est une variable aléatoire. Le rendement moyen $E(r_i)$ et la variance du rendement $V(r_i)$ sont des données connues qui ont été déterminées par des études statistiques.

On sait aussi que les v.a. r_i sont indépendants les unes des autres.

On veut constituer un porte-feuille en prenant une proportion (entre 0 et 1) de chacun de ces titres, la somme des proportions valant 1

Le rendement d'un titre T_i est proportionnel à la proportion de titre choisi. Par exemple si un titre a un rendement de 5% et que l'on a pris une proportion de ce titre égal à $1/2$, ~~[illegible]~~ on a un rendement de 2,5%.

Le problème de la constitution optimale d'un porte-feuille consiste, pour un rendement moyen plancher ρ donné, à minimiser le risque.

Le risque est mesuré par la variance du rendement (on rappelle que la variance mesure les écarts par rapport à la valeur moyenne aussi bien en dessus qu'en dessous)

1) On note x_i la proportion du titre T_i dans le porte-feuille et on note R le rendement du porte-feuille.
Donner l'expression de la valeur moyenne de R, $E(R)$, de la variance de R, $V(R)$, en fonction des $E(r_i)$ et $V(r_i)$ $i = 1$ à n.
On rappelle que les v.a. r_i sont indépendants.
Donner ensuite l'expression du programme mathématique (P) qui modélise le problème de la constitution optimale du porte-feuille.
On notera H la matrice diagonale constituée des $V(r_i)$ multipliés par 2, A la matrice (2 lignes) des contraintes et b le second membre.

2) Donner les conditions de Kühn-Tücker de (P).
Résoudre les conditions de Kühn-Tücker en supposant que :
- les proportions $x_i \neq 0$. $i = 1$ à n
- le rendement moyen plancher est atteint (contrainte saturée)

On exprimera la solution en fonction de H, A, b et des vecteur μ (2 composantes) des multiplicateurs de Lagrange associés à la matrice des contraintes (2 lignes)

3) A.N. $n = 3$ (3 titres)
$\rho = 3\%$

i	1	2	3
$V(r_i)$	6	10	5
$E(r_i)\%$	3	4	2

Écrire le programme (P). Donner H, A, b

Écrire les conditions de Kühn-Tücker de (P)

Résoudre les conditions comme dans 2) et vérifier qu'on obtient bien une solution des conditions de Kühn-Tücker de (P).

Donner la solution du programme (P).

<u>Rappels</u> : 2 v.a. X, Y $\quad a, b \in \mathbb{R}$

on pose $Z = aX + bY$

$E(Z) = E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ linéarité de E

$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X)$ linéarité de E

$= E(X^2) - E^2(X)$

$V(Z) = V(aX + bY) = E\left[(aX + bY)^2\right] - E^2(aX + bY) = E\left[a^2X^2 + b^2Y^2 + 2abXY\right] - \left[aE(X) + bE(Y)\right]^2$

$= a^2E(X^2) + b^2E(Y^2) + 2abE(XY) - \left[a^2E^2(X) + b^2E^2(Y) + 2abE(X)E(Y)\right]$

$= a^2\left[E(X^2) - E^2(X)\right] + b^2\left[E(Y^2) - E^2(Y)\right] + 2ab\underbrace{\left[E(XY) - E(X)E(Y)\right]}_{\text{covariance de } X \text{ et } Y}$

$= a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\operatorname{covar}(X,Y)}$ si X et Y sont indépendantes.

1) rendement du portefeuille $R = \sum_{i=1} x_i r_i$

$\Rightarrow E(R) = \sum_{i=1}^{m} x_i E(r_i)$ et $V(R) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 V(r_i)$ les v.a. r_i étant indépendantes 2 à 2

constitution du portefeuille optimal : $\min \sum_{i=1}^{m} x_i^2 V(r_i)$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i E(r_i) \geq \rho & \text{(rendement moyen} \geq \rho) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 & \text{(total des proportions valant 1)} \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1 \text{ à } m \end{cases}$$

on peut écrire : $\min \frac{1}{2} x^t H x$ en supposant que la première contrainte est saturée

$$\text{s.c.} \begin{cases} Ax = b \\ x_i \geq 0 \quad i = 1 \text{ à } m \end{cases}$$

avec $H = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & 2V(r_i) & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} \cdots E(r_i) \cdots \\ \cdots 1 \cdots \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} \rho \\ 1 \end{bmatrix}$

2) condition de K.T $\begin{cases} Hx - A^t\mu - \nu = 0 \\ Ax = b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1 \text{ à } m \\ \nu_i x_i = 0 \quad i = 1 \text{ à } m \end{cases}$ avec $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ normalement $\mu_1 \geq 0$ puisqu'il est relatif à une inégalité

$\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix}$ vecteur à coordonnées ≥ 0

si on suppose $x_i \neq 0$ alors $\nu_i = 0$

ce qui donne $\begin{cases} Hx = A^t\mu \\ Ax = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = H^{-1}A^t\mu \\ Ax = b \end{cases}$ $\begin{cases} x = H^{-1}A^t\mu \\ AH^{-1}A^t\mu = b \end{cases}$

ici $H = \begin{bmatrix} 12 & & \\ & 20 & \\ & & 10 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) A.N. $\min 6x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

K.T. $\begin{cases} 12x_1 - 3\mu_1 - \mu_2 - \nu_1 = 0 \\ 20x_2 - 4\mu_1 - \mu_2 - \nu_2 = 0 \\ 10x_3 - 2\mu_1 - \mu_2 - \nu_3 = 0 \\ \nu_i x_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$ gradient de la fonction économique et des contraintes

(complémentarité) $\mu_1(3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3) = 0$

(solution réalisable)

on suppose $x_i \neq 0$ donc $\nu_i = 0$ et contrainte n° 1 saturée.

on résout comme dans 2)

$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/12 & & 0 \\ & 1/20 & \\ 0 & & 1/10 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $H^{-1}A^t = \begin{bmatrix} 3/12 & 1/12 \\ 4/20 & 1/20 \\ 2/10 & 1/10 \end{bmatrix}$

$AH^{-1}A^t = \begin{bmatrix} 9/12 + 16/20 + 4/10 & 3/12 + 4/20 + 2/10 \\ 3/12 + 4/20 + 2/10 & 1/12 + 1/20 + 1/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39/20 & 13/20 \\ \frac{13}{20} & \frac{14}{60} \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \frac{39}{20}\mu_1 + \frac{13}{20}\mu_2 = 3 \\ \frac{13}{20}\mu_1 + \frac{14}{60}\mu_2 = 1 \end{cases}$ $\times 3$ $\Rightarrow \mu_2 = 0, \mu_1 = \frac{20}{13} \geq 0$

$x = \frac{20}{13}\begin{bmatrix} 3/12 \\ 4/20 \\ 2/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/13 \\ 4/13 \\ 4/13 \end{bmatrix}$ coordonnées strictement positives.

$V(R) = 6 \times \left[\frac{5}{13}\right]^2 + 10\left[\frac{4}{13}\right]^2 + 5 \times \left[\frac{4}{13}\right]^2 = \frac{6 \times 25 + 10 \times 16 + 5 \times 16}{13^2} = \frac{390}{169} \simeq 2,307$

si on compare avec par exemple $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$ (la même part pour chaque titre)

$V(R) = (6 + 10 + 5) \times \left[\frac{1}{3}\right]^2 = \frac{21}{9} \simeq 2,333$