

# Optimisation mathématique

**A. FAYE**

**1<sup>ère</sup> Année**

**2011-2012**

## Optimisation sans contraintes

Introduction.....	2
1.    Problème.....	2
2.    infimum, minimum.....	2
3.    Notations.....	3
Résultats généraux sur les extrema d'une fonction.....	4
1.    Rappels.....	4
2.    Définitions des différents types d'extremum.....	6
3.    Conditions d'optimalité.....	6
4.    Points selle.....	7
5.    Démarche pour trouver les extremums.....	7
Fonctions convexes.....	8
1.    Ensembles convexes.....	8
2.    Fonctions convexes.....	8
3.    Minimisation d'une fonction convexe.....	10
4.    Application de la convexité.....	10
Méthodes itératives pour l'optimisation sans contraintes.....	12
1.    Méthode des coordonnées.....	12
2.    Méthode de plus forte pente (ou de Cauchy).....	12
3.    Méthodes des directions conjuguées.....	14
4.    Méthode de Newton.....	16
5.    Méthodes quasi-Newtoniennes.....	17

## Optimisation sous contraintes

Projection, séparation.....	21
1.    Projection.....	21
2.    Séparation.....	22
3.    Hyperplan d'appui, cône normal.....	23
4.    Application des théorèmes de séparation.....	23
Conditions d'optimalité sous contraintes.....	25
1.    Introduction.....	25
2.    Cône tangent.....	25
3.    Conditions d'optimalité.....	25
4.    Caractérisation du cône tangent.....	26
5.    Conditions d'optimalité du 1er ordre (Kuhn et Tucker).....	28
6.    Conditions d'optimalité du 2ème ordre.....	30
7.    Résumé.....	34
Dualité lagrangienne.....	35
1.    Problème primal, problème dual.....	35
2.    Relation entre primal et dual.....	35
3.    Points selles.....	35
4.    Relations entre optimums du dual et du primal et point selle.....	36
5.    Relation entre points selles et conditions de Kuhn et Tucker.....	37
6.    Résolution du problème dual.....	38
Méthodes primales.....	43
1.    Introduction.....	43
2.    Méthode du gradient projeté.....	43
3.    méthode du gradient réduit.....	45
Méthodes de pénalité et de barrière.....	50
1.    Introduction.....	50
2.    Méthode de pénalité.....	50
3.    Méthode de barrière.....	54
Méthodes lagrangiennes.....	56
1.    Introduction.....	56
2.    Problèmes avec contraintes d'égalité.....	56
3.    Problèmes avec contraintes d'égalité et d'inégalité.....	59
4.    Problèmes quadratiques.....	61

## **OPTIMISATION SANS CONTRAINTES**

## Introduction

### 1. Problème

Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $X \subseteq D$ . On se pose le problème: minimiser  $f(x)$ ,  $x \in X$ . Résoudre ce problème consiste soit à montrer que  $\min\{f(x): x \in X\}$  n'existe pas, soit à trouver  $x^* \in X$  tel que  $f(x^*) = \min\{f(x): x \in X\}$  (c'est-à-dire  $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in X$ ),  $x^*$  est appelé solution du problème tandis qu'un élément de  $X$  quelconque est appelé solution réalisable ou admissible.  $f$  est appelée fonction objectif.

On définit les mêmes notions pour maximiser. On peut remarquer qu'un problème du type maximiser peut se ramener à un problème du type minimiser de la manière suivante: minimiser  $-f$  puis prendre l'opposé du minimum (s'il existe).

exemples:

- minimiser  $e^x$ ,  $x \leq 0$  n'a pas de solution.
- maximiser  $e^x$ ,  $x \leq 0$  admet  $x^*=0$  pour solution.
- minimiser  $x$ ,  $x > 0$  n'a pas de solution.
- minimiser  $x$ ,  $x \geq 0$  admet  $x^*=0$  pour solution.

Si  $X=D$  (on minimise  $f$  sur son ensemble de définition) le problème est dit sans contraintes.

exemples:

- minimiser  $x_1^2 + x_2^2$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Ici  $D = \mathbb{R}^2$
- minimiser  $\text{Log}(x)$ ,  $x > 0$ . Ici  $D = ]0, +\infty[$

Si  $X \neq D$  le problème est dit sous contraintes.

exemples:

- minimiser  $x_1^2 + x_2^2$  sous la contrainte  $x_1 + x_2 \geq 1$ . Ici  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 1\}$
- minimiser  $\text{Log}(x)$  sous la contrainte  $x \geq 1$ . Ici  $X = [1, +\infty[$

### 2. infimum, minimum

Si le problème a une solution  $x^*$  alors  $\inf\{f(x): x \in X\} = \min\{f(x): x \in X\} = f(x^*)$ . Par contre, il se peut que l'infimum existe mais que le problème n'ait pas de solution. Par exemple  $\inf\{e^x : x \leq 0\} = 0$  mais le problème de minimisation correspondant n'a pas de solution, de même  $\inf\{x : x > 0\} = 0$  (cf. les exemples 1 et 3).

On dispose des théorèmes suivants qui permettent d'affirmer l'existence de minimum dans certains cas précis.

**Théorème du maximum**

Si  $f$  continue, si  $X$  compact alors  $\min\{f(x): x \in X\}$  et  $\max\{f(x): x \in X\}$  existent.

**Corollaire (fonction coercive)**

Si  $f$  continue et  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , si  $X = \mathbb{R}^n$  alors  $\min\{f(x): x \in X\}$  existe.

### 3. Notations

Dans la suite on adoptera les notations suivantes:

- $x \bullet y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  est le produit scalaire des vecteurs  $x$  et  $y$ .
- $\|x\| = \sqrt{x \bullet x} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$  est la norme du vecteur  $x$ .
- $B(x^*, r) = \{x: \|x - x^*\| < r\}$  désigne la boule ouverte de centre  $x^*$  et de rayon  $r$ .
- Etant donnée une matrice  $A$ ,  $A^t$  désigne sa transposée.

## Résultats généraux sur les extrema d'une fonction

### 1. Rappels

#### 1.1. Développement d'une fonction numérique

##### 1.1.1. Formule de Taylor (ordre 2)

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $D$ ,  $x^*$ ,  $x \in D$  tels que  $[x^*, x] \subset D$ ,  $\exists z \in ]x^*, x[$  tel que

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*) \bullet (x - x^*) + \frac{1}{2} (x - x^*) \bullet Hf(z) (x - x^*)$$

$$\text{où } \nabla f(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\cdot) \end{pmatrix}, Hf(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\cdot) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\cdot) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\cdot) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\cdot) \end{pmatrix}$$

##### 1.1.2. Autre formulation

Pour tout  $x \in B(x^*, r) \subseteq D$

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*) \bullet (x - x^*) + \frac{1}{2} (x - x^*) \bullet Hf(x^*) (x - x^*) + \|x - x^*\|^2 \varepsilon(x - x^*)$$

où  $\varepsilon$  est une fonction telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

#### 1.2. Matrice réelle symétrique et forme quadratique

##### 1.2.1. Définition

Soit  $A$  matrice carrée d'ordre  $n$ , réelle, symétrique et  $Q_A(y) = y \bullet Ay$  la forme quadratique associée,  $A$  et  $Q_A$  sont dites:

- semi-définie positive (resp. négative) ssi  $Q_A(y) \geq 0$  (resp.  $\leq 0$ )  $\forall y \in \mathbb{R}^n$
- définie positive (resp. négative) ssi  $Q_A(y) > 0$  (resp.  $< 0$ )  $\forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
- indéfinie ssi  $\exists y, z \in \mathbb{R}^n$  tels que  $Q_A(y) > 0$  et  $Q_A(z) < 0$

exemple:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $Q_A(y) = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_1y_2 = (y_1 - y_2)^2 + 3y_2^2$  est strictement positif  $\forall (y_1, y_2) \neq (0, 0)$ .  $A$  et  $Q_A$  sont donc définies positives.

##### 1.2.2. critères pour reconnaître une matrice définie, semi définie positive ou négative:

###### 1.2.2.1. les valeurs propres

- $A$  est semi-définie positive (resp. négative) ssi toutes ses valeurs propres sont  $\geq 0$  (resp.  $\leq 0$ )
- $A$  est définie positive (resp. négative) ssi toutes ses valeurs propres sont  $> 0$  (resp.  $< 0$ )
- $A$  est indéfinie ssi elle admet une valeur propre  $> 0$  et une valeur propre  $< 0$

exemple: les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  sont les racines du polynôme caractéristique  $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 1$  soit  $\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$ .  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont strictement positives et donc  $A$  est définie positive.

### 1.2.2.2. les mineurs principaux

Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  alors  $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det(A)$  sont les mineurs principaux de  $A$ .

- $A$  est définie positive ssi  $\Delta_k > 0 \quad k = 1, \dots, n$
- $A$  est définie négative ssi  $(-1)^k \Delta_k > 0 \quad k = 1, \dots, n$
- si  $\Delta_k > 0 \quad k = 1, \dots, n-1$  et  $\Delta_n = 0$  alors  $A$  est semi-définie positive
- si  $(-1)^k \Delta_k > 0 \quad k = 1, \dots, n-1$  et  $\Delta_n = 0$  alors  $A$  est semi-définie négative
- si  $\Delta_n < 0$  et si  $n$  est pair alors  $A$  est indéfinie

exemple:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 3$ .  $A$  est donc définie positive.

### 1.2.2.3. décomposition en carrés de formes linéairement indépendantes

Il existe  $n$  réels  $\alpha_i$  et  $n$  formes linéaires  $l_i$  linéairement indépendantes tels que

$$Q_A(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (l_i(y))^2$$

- $A$  est semi-définie positive (resp. négative) ssi  $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i$  (resp.  $\leq 0$ )
- $A$  est définie positive (resp. négative) ssi  $\alpha_i > 0 \quad \forall i$  (resp.  $< 0$ )
- $A$  est indéfinie ssi  $\exists \alpha_i > 0, \exists \alpha_j < 0$

La méthode de Gauss donne une expression de  $Q_A$  en somme de carrés de formes indépendantes.

Si  $a_{11} \neq 0$ , on a  $Q_A(y) = \frac{1}{a_{11}} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_1} \right)^2 + q(y)$  où  $q(y)$  est une forme quadratique indépendante de  $y_1$ . On pose  $l_1(y) = \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_1}$  qui est bien linéaire.

Si  $a_{11} = a_{22} = 0$  et  $a_{12} \neq 0$ , on a  $Q_A(y) = \frac{2}{a_{12}} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_1} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_2} \right) + q(y)$  où  $q(y)$  est une forme quadratique indépendante de  $y_1$  et de  $y_2$ . Dans cette dernière expression on peut faire apparaître la différence de deux carrés et on a

$$Q_A(y) = \frac{1}{8a_{12}} \left( \left( \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_1} + \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_1} - \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_2} \right)^2 \right) + q(y). \quad \text{On pose}$$

$$l_1(y) = \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_1} + \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_2} \text{ et } l_2(y) = \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_1} - \frac{\partial Q_A(y)}{\partial y_2} \text{ qui sont bien linéaires et indépendantes.}$$

En utilisant ces formules on peut de proche en proche décomposer  $Q_A$  en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

exemple:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $Q_A(y) = y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_1y_2$ .

$a_{11} = 1 \neq 0$  et la méthode de Gauss donne  $Q_A(y) = (y_1 - y_2)^2 + 3y_2^2$ .

$a_{22} = 4 \neq 0$  et si on applique la méthode de Gauss en commençant par la variable  $y_2$  on obtient

$$Q_A(y) = \frac{1}{4}(-y_1 + 4y_2)^2 + \frac{3}{4}y_1^2.$$

La décomposition n'est donc pas unique mais dans les deux cas on constate bien que les coefficients  $\alpha_i$  sont strictement positifs et que la forme est donc définie positive.

## 2. Définitions des différents types d'extremum

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x^* \in D$ , on dit que  $f$  admet en  $x^*$  un:

- minimum global sur  $D$  ssi  $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in D$ . Si l'inégalité est stricte pour  $x \neq x^*$  on dit que le minimum est strict.

- minimum local ssi  $\exists B(x^*, \varepsilon)$  tel que  $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in D \cap B(x^*, \varepsilon)$ . Si l'inégalité est stricte pour  $x \neq x^*$  on dit que le minimum est strict.

On définit de manière analogue maximum global, global strict, local, local strict.

$x^*$  est dit point critique si  $\nabla f(x^*) = 0$ .

remarque:  $x^*$  minimum global  $\Rightarrow x^*$  minimum local (de même pour maximum)

La réciproque est vraie dans certains cas particuliers, par exemple  $f$  convexe (concave pour maximum). Le cas des fonctions convexes sera étudié dans un chapitre ultérieur.

## 3. Conditions d'optimalité

Les conditions qui suivent sont établies pour des minima. Remarquant que tout  $x^*$  maximum de  $f$  est minimum de  $-f$ , on déduit facilement les conditions pour les maxima.

### 3.1. conditions nécessaires d'optimalité

#### 3.1.1. conditions du 1er ordre

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $D$  ouvert, si  $x^* \in D$  est un minimum local (a fortiori global) de  $f$  alors  $\nabla f(x^*) = 0$

#### 3.1.2. conditions du 2ème ordre

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $D$  ouvert, si  $x^* \in D$  est un minimum local (a fortiori global) de  $f$  alors  $Hf(x^*)$  est semi-définie positive.

### 3.2. conditions suffisantes d'optimalité

#### 3.2.1. optimalité locale

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $D$  ouvert, si  $x^* \in D$  est un point critique ( $\nabla f(x^*) = 0$ ) et si  $Hf(x^*)$  est définie positive alors  $x^*$  est un minimum local strict.



remarque: si on relâche la condition  $Hf(x^*)$  définie positive à semi-définie positive alors  $x^*$  n'est pas forcément un minimum. Considérer par exemple  $f(x) = x^3$  et  $x^* = 0$

### 3.2.2. optimalité globale

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $D$  ouvert, si  $x^* \in D$  est un point critique ( $\nabla f(x^*) = 0$ ) et si  $\forall z \in D$   $Hf(z)$  est semi-définie positive (resp. définie positive) alors  $x^*$  est un minimum global (resp. global strict).

remarque: la condition  $\forall z \in D$   $Hf(z)$  est semi-définie positive est équivalente à  $f$  convexe sur  $D$ . Le cas particulier des fonctions convexes sera abordé dans un chapitre ultérieur.

## 4. Points selle

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $D$  ouvert, si  $x^* \in D$  est un point critique ( $\nabla f(x^*) = 0$ ) et si  $Hf(x^*)$  est indéfini alors  $\exists d_1, d_2$  tels que  $f(x^* + td_1)$  admet un minimum local strict en  $t=0$  et  $f(x^* + td_2)$  admet un maximum local strict en  $t=0$ . On dit que  $x^*$  est un point selle.

## 5. Démarche pour trouver les extremums

- recherche des points critiques
- pour chaque point critique  $x^*$ ,
  - si  $Hf(x^*)$  est défini positif (resp. négatif)  $x^*$  est un minimum (resp. maximum) local strict.
  - si  $Hf(x^*)$  est indéfini  $x^*$  n'est pas un extremum.
  - si  $Hf(x^*)$  est semi-défini positif (resp. négatif) alors on ne peut pas conclure et il faut faire une étude locale plus précise éventuellement avec un développement de Taylor à un ordre supérieur.

exemples:

-  $f(x) = (x^2 - 1)^3, x \in \mathbb{R}$

De l'équation  $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2 = 0$ , on déduit les 3 points critiques 0, 1, -1 .

$f''(0) = 6 > 0$  le hessien au point 0 est défini positif donc 0 est un minimum local.

$f''(1) = f''(-1) = 0$  les hessiens aux points 1 et -1 sont semi-définis positifs donc on ne peut pas conclure. Une étude plus fine de  $f$  autour de ces points (voir le graphe) montre que ce ne sont pas des minima.

On remarque que  $f$  est coercive donc elle possède un minimum global qui ne peut être que le point 0.

-  $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 12x_1x_2 + 8x_2^3, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$f$  admet 2 points critiques (0,0) et (2,1).

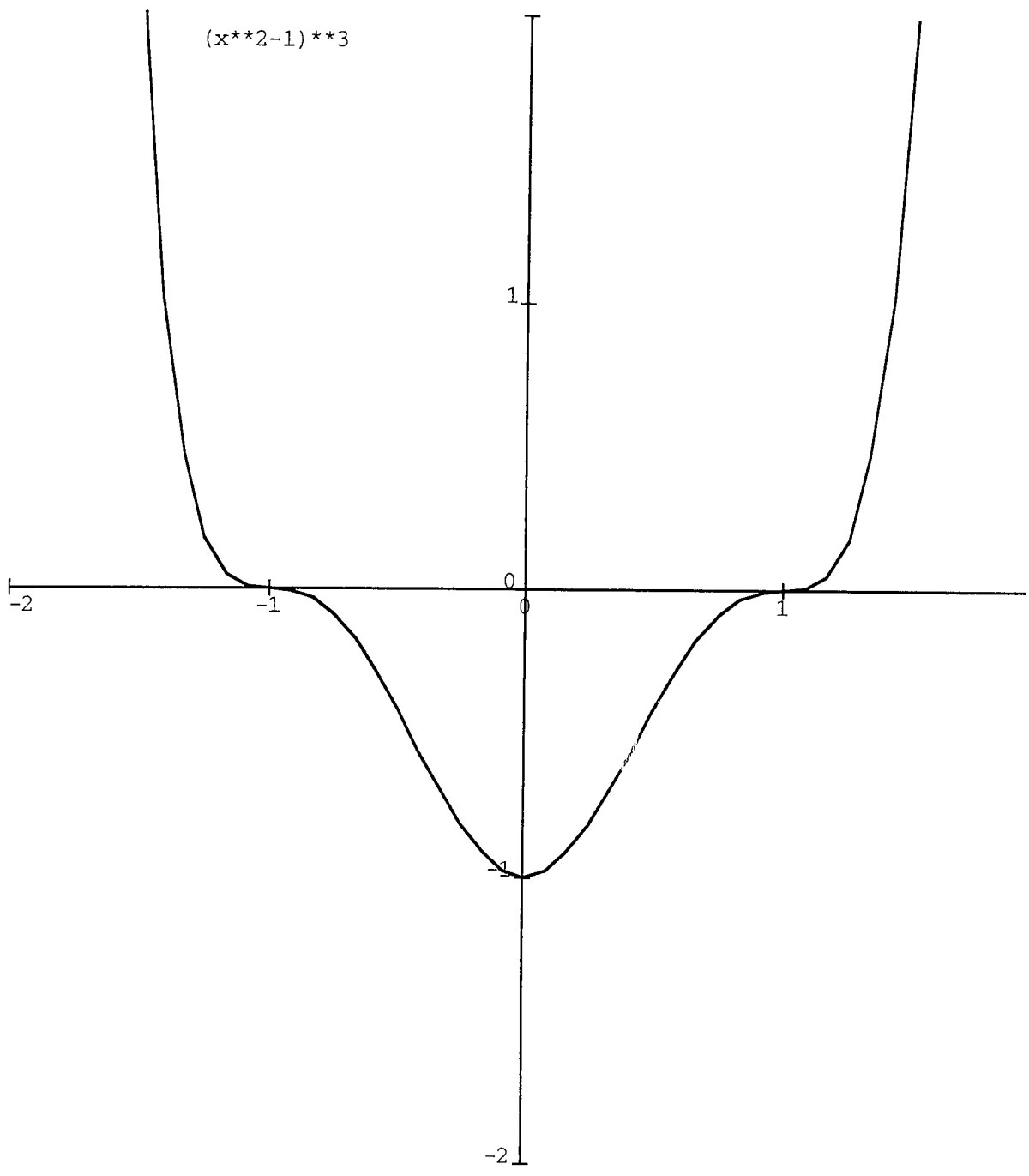
$Hf(0,0)$  est indéfini donc (0,0) n'est pas un extremum.

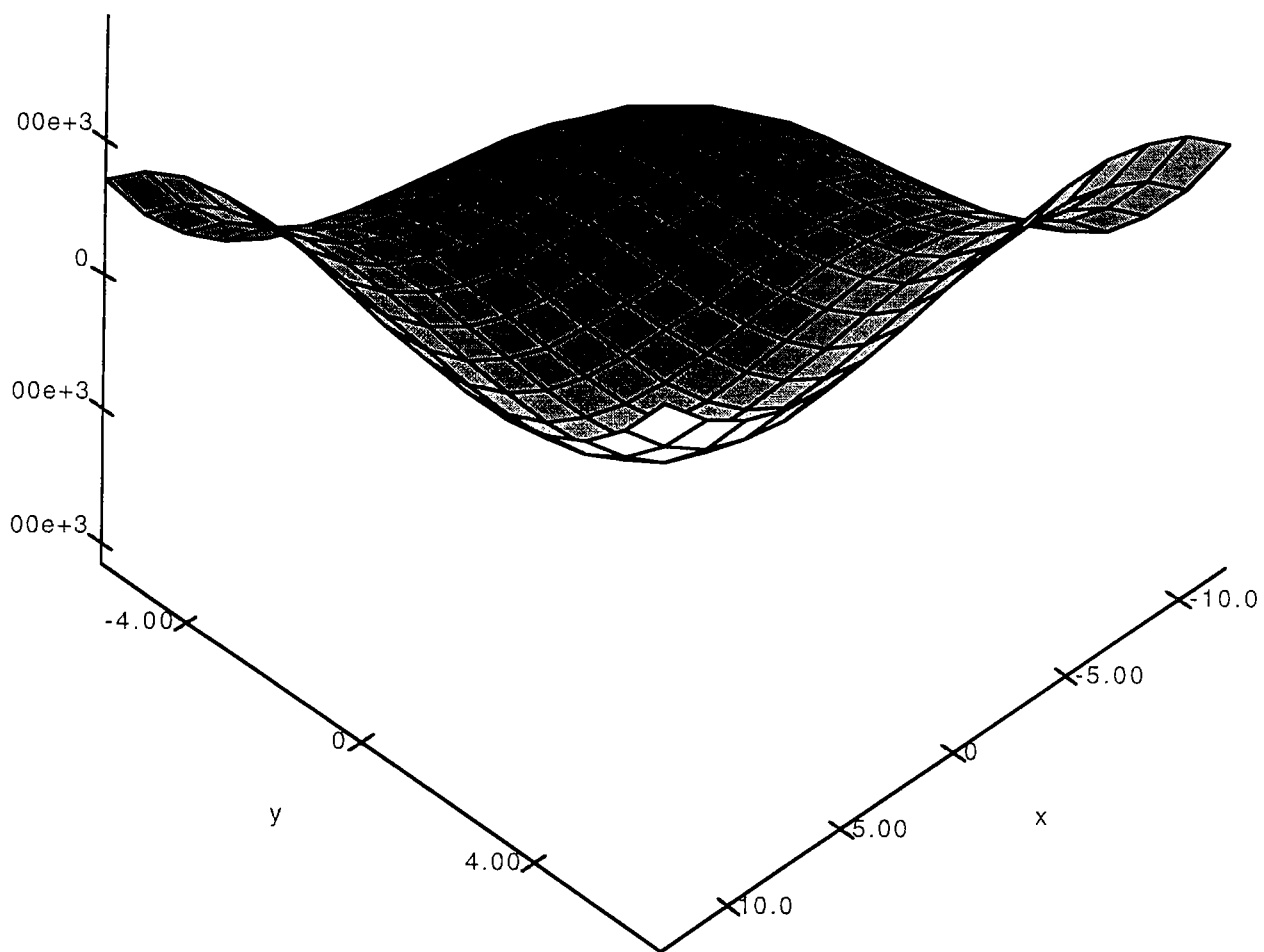
$Hf(2,1)$  est défini positif donc (2,1) est un minimum local strict.

Par contre  $f$  n'admet pas de minimum global puisque  $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} f(x_1, 0) = -\infty$ .

remarque: la recherche des extremum globaux est plus difficile. L'obtention simple des minimas globaux, par exemple, exige des conditions fortes sur  $f$  telles que convexité, coercivité.

$$(x^2-1)^3$$





$$x^3 - 12xy + 8y^3$$

## Fonctions convexes

### 1. Ensembles convexes

#### 1.1. Définition

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $C$  est dit convexe ssi  $\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \in C$  i.e.  $[x, y] \subseteq C$ , où  $[x, y] \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$ .

Par convention  $\emptyset$  est convexe.

Remarque:  $\forall x, y \in C$  l'application  $f_{xy}: [0, 1] \rightarrow C$  définie par  $f_{xy}(\lambda) = x + \lambda(y - x)$  est continue et par conséquent convexité est un cas particulier de connexité par arcs où  $f_{xy}$  est affine.

#### 1.2. Combinaison convexe

##### 1.2.1. Définition

Soient un entier  $p \geq 1$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$   $i = 1, 2, \dots, p$ , on appelle combinaison convexe de  $x_1, x_2, \dots, x_p$  l'élément de la forme  $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$  où  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$   $i = 1, \dots, p$

Exemple: tout point de  $[x, y]$  est une combinaison convexe de  $x$  et  $y$  ( $p=2$  dans ce cas).

##### 1.2.2. propriété

Soit  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $C$  est convexe ssi il est stable par combinaison convexe de ses éléments i.e.  $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C, \forall p \geq 1$  entier,  $\forall x_i \in C, \forall \lambda_i \geq 0$   $i = 1, \dots, p$  tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ .

### 2. Fonctions convexes

#### 2.1. Définition et propriétés

##### 2.1.1. Définition

Soit  $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C$  convexe, on dit que  $f$  est convexe ssi  $\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$ .

On dit que  $f$  est strictement convexe ssi l'inégalité est stricte pour  $x \neq y$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ .

On dit que  $f$  est concave (resp. strictement) ssi  $-f$  est convexe (resp. strictement). Cette définition revient à changer le sens de l'inégalité dans la précédente définition.

exemple: la norme est une fonction convexe car  $\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| \leq (1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

##### 2.1.2. Propriétés d'équivalence

Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes:

-  $f$  convexe

-  $f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i), \forall \lambda_i \geq 0$   $i = 1, \dots, p$  tels que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$

-  $\text{Epi}f$  est convexe où  $\text{Epi}f \stackrel{\text{déf.}}{=} \{(x, \alpha) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$

### 2.1.3. Proposition

Si  $f$  est strictement convexe et si  $\lambda_i > 0 \quad i = 1, \dots, p, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  ( $\lambda_i$  positifs strictement) alors on a l'égalité  $f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$  ssi les  $x_i$  sont égaux 2 à 2 (i.e.  $x_1 = x_2 = \dots = x_p$ ).

### 2.1.4. Propriétés de stabilité

- Si  $f_1, f_2, \dots, f_k$  sont des fonctions convexes définies sur un même convexe  $C$  et si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  sont des réels positifs alors  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_k f_k$  est convexe. De plus si l'une des  $f_i$  est strictement convexe alors  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_k f_k$  est strictement convexe.

- Si  $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe (resp. strictement convexe) et si  $g: f(C) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et croissante (resp. strictement croissante) alors  $g \circ f$  est convexe (resp. strictement convexe).

exemple:  $f(x) = e^{\|x\|^2} \quad x \in \mathbb{R}^n$  est convexe (décomposer en 3 fonctions).

## **2.2. Caractérisation des fonctions convexes différentiables**

### 2.2.1. Caractérisation au 1er ordre

-  $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $C$  ouvert et convexe,  $f$  est convexe ssi  $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) \quad \forall x, y \in C$ .  $f$  est strictement convexe ssi l'inégalité est stricte quand  $x \neq y$ .

L'interprétation géométrique de ce théorème est qu'une fonction convexe est toujours au-dessus de ses plans tangents.

-  $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $C$  ouvert et convexe,  $f$  est convexe ssi  $(\nabla f(y) - \nabla f(x)) \cdot (y - x) \geq 0 \quad \forall x, y \in C$ .  $f$  est strictement convexe ssi l'inégalité est stricte quand  $x \neq y$ .

Dans le cas d'une fonction à une variable, ce théorème signifie que le gradient (la dérivée dans ce cas) d'une fonction convexe est non décroissant.

### 2.2.2. Caractérisation au 2ème ordre

$f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $C$  ouvert et convexe,  $f$  est convexe ssi  $Hf(x)$  est semi-défini positif  $\forall x \in C$ .

exemple:  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$  est convexe.

remarque: si  $Hf(x)$  est défini positif  $\forall x \in C$  alors  $f$  est strictement convexe. Par contre la réciproque est fautive. Considérer par exemple  $f(x) = x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$ .  $f$  est strictement convexe et son hessien  $12x^2$  n'est pas défini positif en  $x=0$ .

### 3. Minimisation d'une fonction convexe

#### 3.1. Propriété des minima locaux

Soit  $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexe,  $C$  convexe, alors tout minimum local de  $f$  est minimum global de  $f$  sur  $C$ . Si  $f$  est strictement convexe et s'il existe un minimum local alors celui-ci est l'unique minimum global de  $f$  sur  $C$ .

#### 3.2. Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

$f: C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  sur  $C$  ouvert et convexe,  $x^* \in C$  est minimum global de  $f$  ssi  $x^*$  est un point critique ( $\nabla f(x^*) = 0$ ).

### 4. Application de la convexité.

#### 4.1. L'inégalité arithmétique-géométrique (AG)

Soient  $x_i, \delta_i$   $i=1, \dots, m$  des réels positifs (strictement) tels que  $\sum_{i=1}^m \delta_i = 1$  alors  $\sum_{i=1}^m \delta_i x_i \geq \prod_{i=1}^m x_i^{\delta_i}$  (AG). Il y a égalité dans AG ssi  $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ .

Exemple:  $n=2, \delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}, \sqrt{x_1} \sqrt{x_2} \leq \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$  ( $x_1 > 0, x_2 > 0$ )

Inégalité que l'on peut, dans ce cas, retrouver par:  $0 \leq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$  où l'égalité est vérifiée ssi  $x_1 = x_2$ .

#### 4.2. Programmation géométrique sans contraintes

##### 4.2.1. définitions

$g: (\mathbb{R}^{+*})^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dit un posinôme si  $g(x) = \sum_{i=1}^m u_i(x)$  où  $u_i(x) = c_i \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ij}}$ ,  $c_i > 0$ ,  $\alpha_{ij}$  réels quelconques.

exemple:  $g(x_1, x_2) = x_1 + 2 \frac{x_2}{x_1^2}$

Un programme géométrique consiste en le problème (noté PG) suivant:  
minimiser un posinôme  $g(x)$  sous les contraintes  $x_i > 0$   $i=1, \dots, n$ .

Le dual d'un programme géométrique consiste en le problème (noté DPG) suivant:

$$\text{maximiser } v(\delta) = \prod_{i=1}^m \left( \frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \text{ sous les contraintes } \begin{cases} \delta_i > 0 \quad i=1, \dots, m & (1) \\ \sum_{i=1}^m \delta_i = 1 & (2) \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \delta_i = 0 \quad j=1, \dots, n & (3) \end{cases}$$

##### 4.2.2. Relations entre un programme géométrique et son dual

théorème de dualité:

$\forall x > 0$  et  $\forall \delta$  vérifiant (1), (2), (3),  $g(x) \geq v(\delta)$ .

théorème:

Si PG a une solution  $x^*$  alors  $\delta_i^* = \frac{u_i(x^*)}{g(x^*)}$   $i=1, \dots, m$  est une solution de DPG et  $v(\delta^*) = g(x^*)$ .

Exemples:

- minimiser  $x_1 + 4 \frac{x_2}{x_1^2} + \frac{1}{x_2}$  sous les contraintes  $x_1 > 0, x_2 > 0$

Les contraintes du dual sont: 
$$\begin{cases} \delta_1 - 2\delta_2 = 0 \\ \delta_2 - \delta_3 = 0 \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1 \\ \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est  $\delta_1^* = \frac{1}{2}, \delta_2^* = \delta_3^* = \frac{1}{4}$

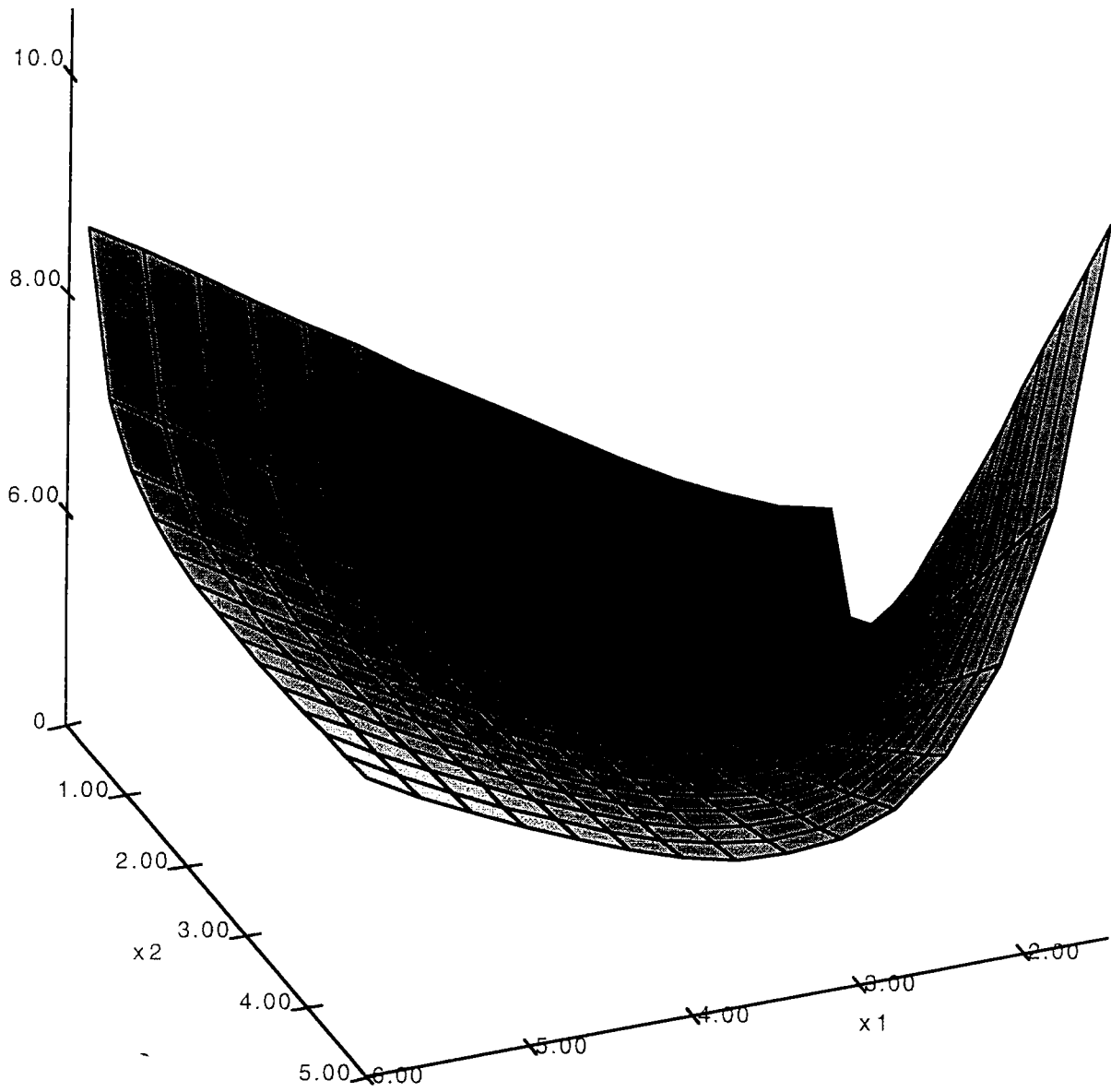
En utilisant  $g(x^*) = v(\delta^*) = 4$  et les relations du type  $u_i(x^*) = \delta_i^* g(x^*)$   $i=1, 2, 3$ , on déduit la solution  $x_1^* = 2, x_2^* = 1$ .

On pourrait retrouver cette solution en cherchant simplement les points critiques de la fonction à minimiser mais il resterait à montrer que c'est bien un minimum global, ce qui est plus délicat.

- minimiser  $x_1 + 2 \frac{x_2}{x_1^2}$  sous les contraintes  $x_1 > 0, x_2 > 0$

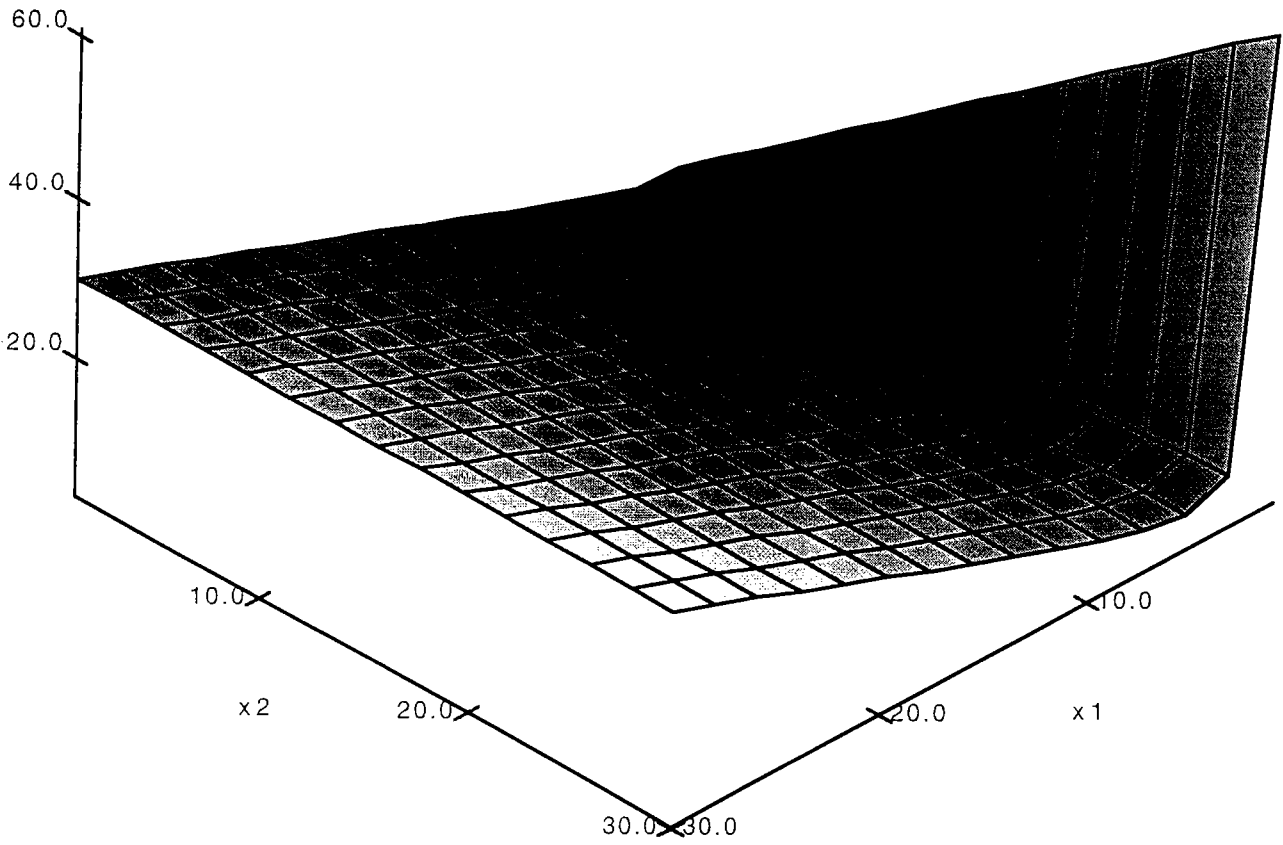
Les contraintes du dual sont: 
$$\begin{cases} \delta_1 - 2\delta_2 = 0 \\ \delta_2 = 0 \\ \delta_1 + \delta_2 = 1 \\ \delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \end{cases}$$

Le dual n'a pas de solution et donc le problème n'a pas de solution (s'il en avait une, on saurait calculer une solution pour le dual).



$$x_1 + \frac{4x_2}{x_1^2} + \frac{1}{x_2}$$





$$x_1 + \frac{2x_2}{x_1^2}$$

## Méthodes itératives pour l'optimisation sans contraintes

On considère dans ce chapitre le problème: minimiser  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

### 1. Méthode des coordonnées

#### 1.1. méthode

On suppose ici  $f$  de classe  $C^1$ .

A chaque itération, on minimise  $f$  selon une variable, les autres étant maintenues fixées.

Soit un point initial  $x^{(0)}$ , on pose  $k=0$ , on fait:

1)

- choisir une coordonnée ou s'arrêter. Soit  $i$  l'indice de la coordonnée choisie.

- minimiser  $f(x_1^{(k)}, \dots, x_i, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  selon  $x_i$ . Soit  $x_i^*$  la solution obtenue.

- construire le point  $x^{(k+1)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_i^*, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ .

-  $k = k + 1$

aller en 1.

Les façons de choisir la coordonnée selon laquelle on minimise  $f$ , sont multiples:

- choix circulaire:  $1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots$

- aller-retour de 1 vers  $n$  puis de  $n$  vers 1.

- choix de la coordonnée correspondant à la composante du gradient  $\nabla f(x^{(k)})$  la plus grande (en valeur absolue). C'est la méthode de Gauss-Southwell. Si la composante trouvée est de valeur nulle, on s'arrête (on est en un point critique).

L'intérêt des deux premières méthodes est qu'elles dispensent de la connaissance du gradient au point courant.

#### 1.2. Propriétés de convergence dans le cas quadratique

Si  $f(x) = \frac{1}{2} x \bullet Ax - b \bullet x$  où  $A$  est symétrique, définie positive, soit  $x^*$  l'unique minimum de  $f$  (il existe, il est donné par  $x^* = A^{-1}b$ ), soit  $E(x) =_{\text{déf}} f(x) - f(x^*)$ . Si on applique la méthode de Gauss-Southwell alors  $E(x^{(k+1)}) \leq E(x^{(k)}) \left(1 - \frac{1}{n-1} \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)$  où  $\lambda_{\max}$ ,  $\lambda_{\min}$  sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de  $A$ .

### 2. Méthode de plus forte pente (ou de Cauchy)

#### 2.1. Rappels sur la dérivée directionnelle

Soit  $f$  numérique définie sur un voisinage  $V$  d'un point  $a$ , soit  $u$  un vecteur de norme 1, on appelle  $f'(a; u) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(a + \lambda u) - f(a)}{\lambda}$  la dérivée de  $f$  au point  $a$  dans la direction  $u$ .

Si  $f$  est différentiable en  $a$  alors  $f'(a; u) = \nabla f(a) \bullet u$ .

Dans ce cas supposons  $\nabla f(a) \neq 0$ , alors le problème, minimiser  $f'(a;u)$  sous la contrainte  $\|u\|=1$ , a pour solution  $u^* = -\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

Ce résultat montre que  $u^* = -\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$  est la direction de plus forte décroissance de  $f$  (en partant du point  $a$ ). C'est sur cette constatation que se fonde la méthode de plus forte pente.

## 2.2. méthode

On suppose maintenant  $f$  de classe  $C^1$ .

à partir d'un point  $x^{(0)}$  on construit la suite de points suivante:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - t^{(k)} \nabla f(x^{(k)}) \quad (k \geq 0)$$

où  $t^{(k)}$  minimise  $\varphi_k(t) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x^{(k)} - t \nabla f(x^{(k)}))$  avec  $t > 0$

La suite s'arrête dès que  $\nabla f(x^{(k)}) = 0$

## 2.3. Quelques caractéristiques de la méthode

Les déplacements dans la méthode de plus forte pente sont orthogonaux c'est-à-dire pour tout triplet de points consécutifs  $x^{(k)}, x^{(k+1)}, x^{(k+2)}$  on a  $(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \bullet (x^{(k+2)} - x^{(k+1)}) = 0$ .

La suite  $(f(x^{(k)}))$  est décroissante (strictement).

## 2.4. Propriétés de convergence

### 2.4.1. Convergence globale

Si  $f$  est coercive i.e.  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , il existe une sous-suite de  $(x^{(k)})$  convergente. De plus toute sous-suite de  $(x^{(k)})$  convergente, converge vers un point critique de  $f$ .

Si  $f$  est coercive et strictement convexe, alors la suite  $(x^{(k)})$  converge vers l'unique minimum de  $f$ .

### 2.4.2. Cas quadratique

Si  $f(x) = \frac{1}{2} x \bullet Ax - b \bullet x$  où  $A$  est symétrique, définie positive, soit  $x^*$  l'unique minimum de  $f$  (il existe, il est donné par  $x^* = A^{-1}b$ ), soit  $E(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) - f(x^*)$  alors

$E(x^{(k+1)}) \leq E(x^{(k)}) \frac{(\lambda_{max} - \lambda_{min})^2}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$  où  $\lambda_{max}$ ,  $\lambda_{min}$  sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de  $A$ .

Remarques:

-  $\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} < 1$  et on retrouve donc le fait que la méthode converge vers  $x^*$  ( $f$  est coercive et strictement convexe). La méthode converge d'autant plus vite que  $\lambda_{max}$  et  $\lambda_{min}$  sont proches: si  $\lambda_{min} = \lambda_{max}$  alors la méthode de plus forte pente trouve le minimum de  $f$  en une itération i.e.  $x^{(1)} = x^*$  et ceci  $\forall x^{(0)}$ .

- La méthode de Cauchy converge plus vite que la méthode de Gauss-Southwell (voir méthode des coordonnées) car on a les inégalités suivantes:

$$\left( \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^2 \leq \left( \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right)^2 = \left( 1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right)^2 \leq \left( 1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right) \leq \left( 1 - \frac{1}{n-1} \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} \right)$$

### 3. Méthodes des directions conjuguées

#### 3.1. méthode des directions conjuguées

##### 3.1.1. Directions conjuguées

Définition: soit  $A$  une matrice symétrique, deux vecteurs non nuls  $d^{(0)}$  et  $d^{(1)}$  sont conjugués par rapport à  $A$  ssi  $d^{(0)} \bullet Ad^{(1)} = 0$ .

Si  $A$  est symétrique et définie positive, si  $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k)}$  sont conjugués 2 à 2 par rapport à  $A$  alors  $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k)}$  forment une famille libre.

##### 3.1.2. méthode

La méthode s'applique à la recherche du minimum de  $q(x) = \frac{1}{2} x \bullet Ax + b \bullet x$  où  $A$  est symétrique et définie positive.

Soient  $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(n-1)}$  conjugués 2 à 2 par rapport à  $A$ , à partir d'un point  $x^{(0)}$  on construit les  $n$  points  $x^{(k)}$  suivants:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} d^{(k)} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

où  $\lambda^{(k)}$  minimise  $q(x^{(k)} + \lambda d^{(k)})$  ( $\lambda$  quelconque)

$q$  étant quadratique  $\lambda^{(k)}$  s'exprime simplement par:

$$\lambda^{(k)} = \frac{-g^{(k)} \bullet d^{(k)}}{d^{(k)} \bullet Ad^{(k)}} \quad \text{où } g^{(k)} = \nabla q(x^{(k)})$$

### 3.1.3. théorème des directions conjuguées

$g^{(k)} \bullet d^{(i)} = 0 \quad k=1, \dots, n, \quad i=0, \dots, k-1$  où  $g^{(k)} = \nabla q(x^{(k)})$  et  $x^{(k)}$  calculé par la méthode des directions conjuguées.

On en déduit que  $g^{(n)} = 0$  et donc que  $x^{(n)}$  minimise  $q(x)$ .

### 3.2. **méthode du gradient conjugué**

Elle construit au fur et à mesure des directions conjuguées par rapport à  $A$ .

à partir d'un point  $x^{(0)}$  et de  $d^{(0)} = -g^{(0)}$  on fait:

$$\lambda^{(k)} = \frac{-g^{(k)} \bullet d^{(k)}}{d^{(k)} \bullet Ad^{(k)}}$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} d^{(k)} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$
$$\beta^{(k)} = \frac{g^{(k+1)} \bullet Ad^{(k)}}{d^{(k)} \bullet Ad^{(k)}}$$
$$d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta^{(k)} d^{(k)}$$

Le choix de  $\lambda^{(k)}$  est tel que  $\lambda^{(k)}$  minimise  $q(x^{(k)} + \lambda d^{(k)})$  ( $\lambda$  quelconque)

Le choix de  $\beta^{(k)}$  est tel que  $d^{(k+1)} \bullet Ad^{(k)} = 0$ .

$d^{(k+1)}$  et  $d^{(k)}$  sont donc conjuguées. Il s'avère que  $d^{(k+1)}$  et  $d^{(i)}$  ( $i=0, \dots, k-1$ ) sont aussi conjuguées. Donc la méthode donne l'optimum en  $n$  itérations (d'après le théorème des directions conjuguées).

### 3.3. **généralisation à une fonction quelconque**

Il y a 2 possibilités pour adapter la méthode des gradients conjugués à une fonction  $f$  quelconque:  
- l'approximation quadratique où à chaque itération  $f$  est approximée par son développement au second ordre.

- la descente linéaire où à chaque itération l'on recherche effectivement le minimum dans la direction  $d^{(k)}$  courante. Si de plus on utilise une expression de  $\beta^{(k)}$  en fonction du gradient, la méthode présente l'avantage de n'utiliser que les dérivées premières de  $f$  (elle évite le calcul

coûteux du Hessien en chaque point). L'expression utilisée est  $\beta^{(k)} = \frac{\|g^{(k+1)}\|^2}{\|g^{(k)}\|^2}$  qui est déduite du

cas quadratique.

Pour assurer la convergence de la méthode, il est nécessaire de réinitialiser toutes les  $n$  itérations la direction de déplacement par l'opposé du gradient courant (comme à l'initialisation).

méthode de l'approximation quadratique:

1) à partir d'un point  $x^{(0)}$  et de  $d^{(0)} = -g^{(0)}$ ,  $k=0$ , on fait:

2)

$$\lambda^{(k)} = \frac{-g^{(k)} \bullet d^{(k)}}{d^{(k)} \bullet Hf(x^{(k)})d^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} d^{(k)}$$

$$\beta^{(k)} = \frac{g^{(k+1)} \bullet Hf(x^{(k)})d^{(k)}}{d^{(k)} \bullet Hf(x^{(k)})d^{(k)}}$$

$$d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta^{(k)} d^{(k)}$$

si  $k+1 = n$  alors  $x^{(0)} = x^{(n)}$  aller en 1, sinon  $k = k+1$  aller en 2

Dans la méthode de descente linéaire, la ligne  $\lambda^{(k)} = \frac{-g^{(k)} \bullet d^{(k)}}{d^{(k)} \bullet Hf(x^{(k)})d^{(k)}}$  est remplacée par

$\lambda^{(k)}$  minimise  $f(x^{(k)} + \lambda d^{(k)})$  ( $\lambda$  quelconque), l'expression de  $\beta^{(k)}$  est remplacée par

$$\beta^{(k)} = \frac{\|g^{(k+1)}\|^2}{\|g^{(k)}\|^2}.$$

#### 4. Méthode de Newton

On suppose maintenant  $f$  de classe  $C^2$ .

A chaque itération de la méthode, on approxime  $f$  par son expression en fonction des 2 premiers termes du développement de Taylor:

$$f_k(x) = f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)}) (x - x^{(k)}) + \frac{1}{2} (x - x^{(k)}) \bullet Hf(x^{(k)}) (x - x^{(k)})$$

et on recherche le point critique de cette approximation  $f_k(x)$  qui sera le point suivant:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - Hf(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)}).$$

Si  $Hf(x^{(k)})$  est définie positive et si  $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$  alors  $-Hf(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})$  est une direction suivant laquelle  $f$  décroît (direction de descente).

Il y a des variantes possibles de la méthode:

-  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} Hf(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})$  où  $\lambda^{(k)}$  (de signe quelconque) minimise  $f$  dans la direction  $-Hf(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})$ .

-  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} \left( Hf(x^{(k)}) + \varepsilon^{(k)} I \right)^{-1} \nabla f(x^{(k)})$  où  $\varepsilon^{(k)}$  est choisi de sorte que  $\left( Hf(x^{(k)}) + \varepsilon^{(k)} I \right)$  soit définie positive et où  $\lambda^{(k)} \geq 0$  minimise  $f$  dans la direction  $-\left( Hf(x^{(k)}) + \varepsilon^{(k)} I \right)^{-1} \nabla f(x^{(k)})$ .

L'inconvénient majeur de la méthode de Newton et de ses variantes est le calcul du Hessien.

## 5. Méthodes quasi-Newtoniennes

### 5.1. équation de la sécante

On approxime l'inverse du Hessien par une matrice  $S^{(k+1)}$  qui vérifie l'équation  $x^{(k+1)} - x^{(k)} = S^{(k+1)} \left( \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)}) \right)$  issue du développement de Taylor à l'ordre 1 de  $\nabla f(x)$ .

Les desiderata sont:  $S^{(k+1)}$  symétrique (comme l'inverse du Hessien) et simple à mettre à jour. L'idéal serait qu'elle soit définie positive pour fournir des directions de descente de  $f$ .

notations:

- soient  $a$  et  $b$  2 vecteurs colonne, on note  $a \otimes b = ab^t$  le produit tensoriel de  $a$  et  $b$ . Le résultat est une matrice.

-  $d^{(k)} \stackrel{\text{déf}}{=} x^{(k+1)} - x^{(k)}$  le déplacement et  $y^{(k)} \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)})$  la variation du gradient.

### 5.2. correction de rang 1

On utilise la mise à jour suivante:  $S^{(k+1)} = S^{(k)} + \alpha^{(k)} a^{(k)} \otimes a^{(k)}$

Pour satisfaire l'équation de la sécante, il suffit de prendre:

$$a^{(k)} = d^{(k)} - S^{(k)} y^{(k)} \text{ et } \alpha^{(k)} = \frac{1}{y^{(k)} \bullet \left( d^{(k)} - S^{(k)} y^{(k)} \right)}$$

Le problème de cette mise à jour est l'éventuelle division par 0. Cependant dans le cas où  $f$  est quadratique, si il n'y a pas de division par 0, l'inverse du hessien est atteint en  $n$  itérations.

méthode:

soit un point  $x^{(0)}$ ,  $S^{(0)} = I$  (initialisation)

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} S^{(k)} \nabla f(x^{(k)})$  où  $\lambda^{(k)}$  (de signe quelconque) minimise  $f$  dans la direction  $-S^{(k)} \nabla f(x^{(k)})$

$$S^{(k+1)} = S^{(k)} + \frac{\left(d^{(k)} - S^{(k)} y^{(k)}\right) \otimes \left(d^{(k)} - S^{(k)} y^{(k)}\right)}{y^{(k)} \bullet \left(d^{(k)} - S^{(k)} y^{(k)}\right)}$$

$k=k+1$  et répéter.

### 5.3. correction de rang 2

#### 5.3.1. méthode DFP

On utilise la mise à jour suivante:  $S^{(k+1)} = S^{(k)} + \alpha^{(k)} a^{(k)} \otimes a^{(k)} + \beta^{(k)} b^{(k)} \otimes b^{(k)}$

Pour satisfaire l'équation de la sécante, il suffit de prendre:

$$a^{(k)} = d^{(k)}, b^{(k)} = S^{(k)} y^{(k)} \text{ et } \alpha^{(k)} = \frac{1}{y^{(k)} \bullet d^{(k)}}, \beta^{(k)} = -\frac{1}{y^{(k)} \bullet S^{(k)} y^{(k)}}$$

Ces formules présentent les propriétés suivantes:

Si  $S^{(k)}$  est définie positive, si  $x^{(k)}$  n'est pas un point critique et si  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} S^{(k)} \nabla f(x^{(k)})$  où  $\lambda^{(k)}$  minimise  $f(x^{(k)} - \lambda S^{(k)} \nabla f(x^{(k)}))$ ,  $\lambda > 0$  alors:

- les dénominateurs ne sont pas nuls
- $S^{(k+1)}$  est définie positive

Dans le cas où  $f$  est quadratique (hessien constant  $A$  défini positif) les directions de déplacements sont conjuguées 2 à 2 par rapport à  $A$  et  $S^{(n)} = A^{-1}$ , ceci  $\forall S^{(0)}$  définie positive. Ce qui entraîne que le minimum est trouvé en au plus  $n$  itérations.

méthode:

soit un point  $x^{(0)}$ ,  $S^{(0)} = I$  (initialisation)

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda^{(k)} S^{(k)} \nabla f(x^{(k)})$  où  $\lambda^{(k)}$  (positif) minimise  $f$  dans la direction  $-S^{(k)} \nabla f(x^{(k)})$

$$S^{(k+1)} = S^{(k)} + \frac{d^{(k)} \otimes d^{(k)}}{y^{(k)} \bullet d^{(k)}} - \frac{S^{(k)} y^{(k)} \otimes S^{(k)} y^{(k)}}{y^{(k)} \bullet S^{(k)} y^{(k)}}$$

$k=k+1$  et répéter.

#### 5.3.2. méthode BFGS

On peut, à la place d'approximer l'inverse du hessien, approximer le hessien. Les matrices d'approximation doivent satisfaire l'équation de la sécante (cette fois inversée):



$$D^{(k+1)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)}) \Leftrightarrow D^{(k+1)}d^{(k)} = y^{(k)}$$

$y^{(k)}$ ,  $d^{(k)}$  jouent un rôle symétrique par rapport à la méthode DFP. Donc la formule de mise à jour est:

$$D^{(k+1)} = D^{(k)} + \frac{y^{(k)} \otimes y^{(k)}}{y^{(k)} \bullet d^{(k)}} - \frac{D^{(k)}d^{(k)} \otimes D^{(k)}d^{(k)}}{d^{(k)} \bullet D^{(k)}d^{(k)}}$$

Si l'on prend l'inverse de chaque côté en appliquant 2 fois la formule de Sherman-Morrison  $(A + a \otimes b)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}a \otimes bA^{-1}}{1 + b \bullet A^{-1}a}$ , on obtient la formule de mise à jour suivante, approximant l'inverse du hessien:

$$S^{(k+1)} = S^{(k)} + \left( 1 + \frac{y^{(k)} \bullet S^{(k)}y^{(k)}}{y^{(k)} \bullet d^{(k)}} \right) \frac{d^{(k)} \otimes d^{(k)}}{y^{(k)} \bullet d^{(k)}} - \frac{d^{(k)} \otimes S^{(k)}y^{(k)} + S^{(k)}y^{(k)} \otimes d^{(k)}}{y^{(k)} \bullet d^{(k)}}$$

Cette formule est la base de la méthode BFGS.

L'expérience montre que cette méthode est moins sensible aux imprécisions de calcul (lors de la minimisation unidirectionnelle de  $f$ ) que DFP. Les calculs approchés dans DFP, font que  $S^{(k+1)}$  n'est pas toujours définie positive.

## **OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES**

## Projection, séparation

### 1. Projection

#### 1.1. Définition

Soient  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^* \in C$  tel que  $\|x - x^*\| = \inf \{\|x - y\| : y \in C\}$ ,  $x^*$  est appelé projection de  $x$  sur  $C$ .

$x^*$ , s'il existe, est le point de  $C$  le plus proche de  $x$ . Par exemple, si  $x$  est dans  $C$ ,  $x^* = x$ .

#### 1.2. Projection sur un convexe

##### 1.2.1. Caractérisation

Soient  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^* \in C$ ,  $x^*$  est projection de  $x$  sur  $C$  ssi  $(x^* - x) \bullet (x^* - y) \leq 0 \quad \forall y \in C$ .

La caractérisation s'interprète en disant que les vecteurs  $(x - x^*)$  et  $(y - x^*)$  forment un angle obtus  $\alpha$ . Rappelons que:  $(x - x^*) \bullet (y - x^*) = \cos \alpha \|x - x^*\| \|y - x^*\|$ . Voir figure 1.

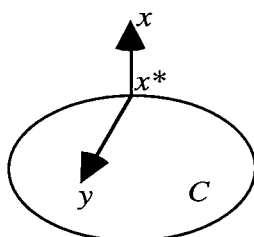


figure 1

Dans le cas particulier d'un sous-espace  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  (un sous-espace est convexe), en prenant  $y = z + x^*$  puis  $y = -z + x^*$ , on retrouve la caractérisation connue:  $(x^* - x) \bullet z = 0 \quad \forall z \in L$ . Voir la figure 2.

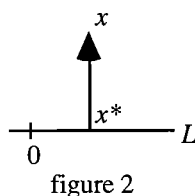


figure 2

##### 1.2.2. Unicité

La projection sur un convexe, si elle existe, est unique. Cela découle, directement de la caractérisation.

##### 1.2.3. Existence

La projection sur un fermé de  $\mathbb{R}^n$  existe. Pour le démontrer, on se ramène à un problème de minimisation sur un compact.

## 2. Séparation

### 2.1. Demi-espaces

Dans  $R^n$ , soit un hyperplan  $H = \{x: p \bullet x = \alpha\}$   $p \neq 0$ , on note  $H^+ = \{x: p \bullet x \geq \alpha\}$  et  $H^- = \{x: p \bullet x \leq \alpha\}$ . On appelle  $H^+, H^-$  des demi-espaces.

### 2.2. Différentes séparations

Soient  $S_1, S_2 \subseteq R^n$ , non vides, et  $H = \{x: p \bullet x = \alpha\}$   $p \neq 0$  un hyperplan,

- $H$  sépare largement  $S_1, S_2$  ssi  $\forall x_1 \in S_1, \forall x_2 \in S_2, p \bullet x_1 \geq \alpha \geq p \bullet x_2$
- $H$  sépare proprement  $S_1, S_2$  ssi  $H$  sépare largement  $S_1, S_2$  et si  $S_1, S_2$  ne sont pas dans  $H$
- $H$  sépare strictement  $S_1, S_2$  ssi  $\forall x_1 \in S_1, \forall x_2 \in S_2, p \bullet x_1 > \alpha > p \bullet x_2$
- $H$  sépare fortement  $S_1, S_2$  ssi  $\exists \varepsilon > 0, \forall x_1 \in S_1, \forall x_2 \in S_2, p \bullet x_1 \geq \alpha + \varepsilon \quad \alpha \geq p \bullet x_2$

### 2.3. Séparation d'un point et d'un convexe

#### 2.3.1. convexe fermé

théorème:  $x \notin C, C$  convexe, fermé, non vide, il existe  $H$  qui sépare fortement  $x$  et  $C$  i.e.  $\exists p \neq 0, \alpha, p \bullet x > \alpha \geq p \bullet y \quad \forall y \in C$  ( $\varepsilon = p \bullet x - \alpha$ ).

#### 2.3.2. convexe quelconque

théorème:  $x \notin C, C$  convexe, non vide, il existe  $H$  qui sépare largement  $x$  et  $C$  i.e.  $\exists p \neq 0, p \bullet x \geq p \bullet y \quad \forall y \in C$  ( $\alpha = p \bullet x$ )

### 2.4. Séparation de deux convexes

Théorème: Soient  $C_1$  et  $C_2$  2 convexes de  $R^n$ , non vides,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ , alors il existe un hyperplan qui sépare largement  $C_1$  et  $C_2$  i.e.  $\exists p \neq 0, p \bullet x_1 \geq p \bullet x_2 \quad \forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2$  (prendre  $\alpha = \inf\{p \bullet x_1 : x_1 \in C_1\}$ ).

Pour le démontrer, on se ramène à la séparation d'un point (en l'occurrence 0) et d'un convexe (en l'occurrence  $C_2 - C_1$ ).

Corollaire: Soient  $C_1$  et  $C_2$  2 convexes de  $R^n$ , non vides,  $C_1 \cap \overset{\circ}{C}_2 = \emptyset$ , alors il existe un hyperplan qui sépare largement  $C_1$  et  $C_2$ .

En effet,  $H^- = \{x_2: \alpha \geq p \bullet x_2\}$  est fermé. Donc, si  $\alpha \geq p \bullet x_2 \quad \forall x_2 \in \overset{\circ}{C}_2$  est vérifié c'est-à-dire  $\overset{\circ}{C}_2 \subseteq H^-$  alors  $\overline{\overset{\circ}{C}_2} = \overline{\overset{\circ}{C}_2} \subseteq H^-$  est vérifié et donc  $\alpha \geq p \bullet x_2 \quad \forall x_2 \in C_2$ . Il suffit par conséquent de séparer  $C_1$  et  $\overset{\circ}{C}_2$  (ce dernier étant convexe).

### 3. Hyperplan d'appui, cône normal

Rappel et notation:  $S \subseteq R^n$ , on note  $\partial S$  la frontière de  $S$ . On rappelle que  $\partial S = \bar{S} - \overset{\circ}{S}$ .

Définition: Soit  $S \subseteq R^n$  et  $x \in \partial S$ . Un hyperplan  $H = \{y: p \bullet y = p \bullet x\}$ , passant donc par  $x$ , est appelé hyperplan d'appui (en abrégé plan d'appui) de  $S$  en  $x$  ssi  $S \subseteq H^+$  (i.e.  $p \bullet y \geq p \bullet x \forall y \in S$ ) ou bien  $S \subseteq H^-$  (i.e.  $p \bullet y \leq p \bullet x \forall y \in S$ ).

Définition: Soient  $S \subseteq R^n$ ,  $x \in R^n$ .  $N(S, x) \stackrel{def}{=} \{p: p \bullet y \leq p \bullet x, \forall y \in S\}$  est appelé cône normal de  $S$  en  $x$ .

Vérifier que c'est bien un cône (i.e. stable par multiplication par un scalaire positif).

Si  $x \in \overset{\circ}{S}$  alors  $N(S, x) = \{0\}$ . Pour le voir prendre  $y - x = \varepsilon p$   $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$  suffisamment petit) alors  $\|p\|^2 \leq 0$ .

Exemple:  $H = \{z: p \bullet z = \alpha\}$  ( $p \neq 0$ ) un hyperplan et  $x \in H$ , alors  $N(H, x) = \{\lambda p: \lambda \in R\}$ .

Théorème: Soit  $C$  convexe de  $R^n$  et  $x \in \partial C$  alors il existe un plan d'appui de  $C$  en  $x$ .

En effet  $\{x\} \cap \overset{\circ}{C} = \emptyset$  donc il existe un hyperplan  $H$  qui sépare largement  $x$  et  $C$  (prendre  $C_1 = \{x\}$ ,  $C_2 = C$  et appliquer le corollaire précédent sur la séparation de deux convexes).

### 4. Application des théorèmes de séparation

#### 4.1. théorème de Farkas

Soit  $A$  une matrice  $m$  lignes,  $n$  colonnes et  $A^t$  sa transposée,  $c$  un vecteur à  $n$  coordonnées. Alors un et un seul des deux systèmes suivants a une solution:

système 1 (inconnues  $x$ ):  $Ax \leq 0$ ,  $c \bullet x > 0$ ,  $x \in R^n$

système 2 (inconnues  $y$ ):  $A^t y = c$ ,  $y \geq 0$ ,  $y \in R^m$

Si le système 2 a une solution  $y$ , en multipliant scalairement  $y$  par  $Ax$ , on déduit que le système 1 ne peut pas avoir de solution.

Si le système 2 n'a pas de solution on sépare fortement  $C = \{z: z = A^t y, y \geq 0\}$  convexe, fermé et le point  $c$ . La normale  $p$  du plan de séparation  $H = \{z: p \bullet z = \alpha\}$  vérifie les conditions du système 1 en raison de la spécificité de  $C$ .

Le théorème de Farkas s'énonce aussi:  $(Ax \leq 0 \Rightarrow c \bullet x \leq 0) \Leftrightarrow (\exists y \geq 0 \ c = A^t y)$

Corollaire

Soit  $A$  une matrice  $m$  lignes,  $n$  colonnes,  $B$  une matrice  $l$  lignes,  $n$  colonnes,  $c$  un vecteur à  $n$  coordonnées. Alors un et un seul des deux systèmes suivants a une solution:

système 1 (inconnues  $x$ ):  $Ax \leq 0$ ,  $Bx = 0$ ,  $c \bullet x > 0$ ,  $x \in R^n$

système 2 (inconnues  $y, z$ ):  $A^t y + B^t z = c$ ,  $y \geq 0$ ,  $y \in R^m$ ,  $z \in R^l$

Il suffit d'appliquer le théorème avec une matrice  $A$  remplacée par la matrice  $m+2l$  lignes  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ -B \end{pmatrix}$  dont la transposée est  $(A^t \ B^t \ -B^t)$ .

#### 4.2. Théorème de Gordan

Soit  $A_1$  une matrice  $m$  lignes,  $n$  colonnes, soit  $A_2$  une matrice  $l$  lignes,  $n$  colonnes.

Soit le système 1 (inconnues  $x$ ):  $A_1x < 0$ ,  $A_2x = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

Soit le système 2 (inconnues  $y, z$ ):  $A_1^t y + A_2^t z = 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $z \in \mathbb{R}^l$ ,  $(y, z) \neq (0, 0)$

Si le système 1 n'a pas de solution alors le système 2 a une solution.

Pour le montrer on sépare les 2 convexes  $C_1 = \{(u_1, u_2) : u_1 = A_1x, u_2 = A_2x, x \in \mathbb{R}^n\}$  et  $C_2 = \{(v_1, 0) : v_1 < 0\}$ . La normale  $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$  du plan de séparation vérifie les conditions du système 2 en raison de la spécificité de  $C_1$  et  $C_2$ .

#### 4.3. Sous-gradient

##### Définition

Soient  $f$  convexe définie sur un convexe  $C$ ,  $\bar{x} \in C$ . On dit que  $\xi$  est un sous-gradient de  $f$  en  $\bar{x}$  ssi  $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi \bullet (x - \bar{x}) \ \forall x \in C$ .

De manière symétrique, on définit un sous-gradient pour une fonction concave en inversant le sens de l'inégalité précédente.

Exemple: si  $f$  convexe est de classe  $C^1$  et si  $\bar{x} \in \overset{\circ}{C}$ , on a montré que  $f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \bullet (x - \bar{x}) \ \forall x \in C$ . Donc le gradient est un sous-gradient.

Dans la suite du paragraphe il est sous-entendu que  $f$  est convexe.

##### Théorème

Soient  $f$  définie sur un convexe  $C$ ,  $\bar{x} \in \overset{\circ}{C}$ . Il existe un sous-gradient de  $f$  en  $\bar{x}$ .

Pour le montrer on remarque que  $Epi(f) \stackrel{def}{=} \{(x, y) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$  est convexe et que  $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \partial Epi(f)$ . On en déduit qu'il existe un plan d'appui de  $Epi(f)$  en  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$  i.e. il existe  $(\xi, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tel que  $(\bar{x}, f(\bar{x})) \bullet (\xi, \mu) \geq (x, y) \bullet (\xi, \mu) \ \forall (x, y) \in Epi(f)$  soit encore  $\bar{x} \bullet \xi + f(\bar{x})\mu \geq x \bullet \xi + y\mu \ \forall (x, y) \in Epi(f)$ . La spécificité de  $Epi(f)$  et le fait que  $\bar{x}$  soit intérieur à  $C$  impliquent que  $\mu < 0$ . On déduit alors que  $-\frac{1}{\mu}\xi$  un sous-gradient de  $f$  en  $\bar{x}$ .

##### Définition

L'ensemble des sous-gradients de  $f$  en  $\bar{x}$  est appelé sous-différentiel de  $f$  en  $\bar{x}$  et noté  $\partial f(\bar{x})$ .

##### Théorème

Si  $f$  est différentiable en  $\bar{x} \in \overset{\circ}{C}$ , le sous-différentiel en  $\bar{x}$  comporte un seul élément à savoir le gradient au point  $\bar{x}$ .

## Conditions d'optimalité sous contraintes

### 1. Introduction

Soient  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $S \subset D$  (inclusion stricte). On considère le problème (P) suivant:

$$\text{minimiser } f(x) \quad x \in S.$$

$S$  est le plus souvent décrit comme l'ensemble des points vérifiant un nombre fini d'inégalités et d'égalités appelées contraintes:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \right\}.$$

Suivant le cas  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $h_i(x)$  seront de classe  $C^1$  ou  $C^2$ .

Pour le problème (P), minimiser  $f(x) \quad x \in S$ , on dit que  $x^*$  est:

- solution, ou encore minimum global, de (P) ssi  $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S$ . Si l'inégalité est stricte pour  $x \neq x^*$  on dit que le minimum est strict.
- minimum local de (P) ssi  $\exists B(x^*, \varepsilon)$  tel que  $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \varepsilon)$ . Si l'inégalité est stricte pour  $x \neq x^*$  on dit que le minimum est strict.

Un point  $x$  quelconque de  $S$  est appelé solution réalisable.

### 2. Cône tangent

Définition

Soient  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in S$ . On dit que  $y$  est tangent à  $S$  en  $x$  ssi il existe les suites  $x_k \in S$ ,  $\lambda_k > 0$  telles que  $x_k \rightarrow x$  et  $\lambda_k(x_k - x) \rightarrow y$ .

On note  $T(S, x)$  l'ensemble des  $y$  tangents à  $S$  en  $x$ .

Propriétés:  $T(S, x)$  est un cône, contenant 0, fermé. De plus si  $x \in \overset{\circ}{S}$  alors  $T(S, x) = \mathbb{R}^n$ .

Exemple:  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ,  $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$   $\alpha > 0$ ,  $x \in S$ . On a  $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in T(S, x)$ . En effet

$$x_k = \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_k = \frac{k}{\alpha} > 0, x_k \in S \quad \forall k \geq 1, x_k \rightarrow x, \lambda_k(x_k - x) \rightarrow y.$$

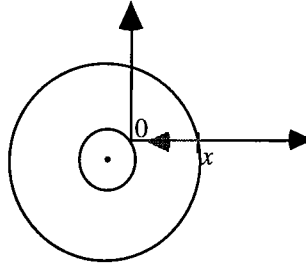
### 3. Conditions d'optimalité

#### 3.1. Conditions nécessaires

Si  $x^*$  est un minimum local de (P) alors  $\forall y \in T(S, x^*) \quad \nabla f(x^*) \bullet y \geq 0$ .

Exemple: soit (P) minimiser  $f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2$ ,  $x \in S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ . Pour  $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$   $\alpha > 0$ ,  $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in T(S, x)$  et  $\nabla f(x) \bullet y = -2(\alpha + 1) < 0$ . Donc  $x$  ne vérifie pas la

condition nécessaire. En effet, on voit sur la figure 1 que tout déplacement de  $x$  vers l'origine améliore la valeur de la fonction objectif.



Les cercles concentriques sont les courbes de niveau de  $f$   
i.e.  $\{x: f(x)=c\}$  où  $c$  est une constante.

figure 1

D'après les propriétés du cône tangent, si  $x^* \in S^\circ$  alors  $T(S, x^*) = R^n$ . Dans ce cas la condition d'optimalité devient  $\nabla f(x^*) = 0$ . On retrouve la condition établie dans le cas sans contraintes. Le point est intérieur donc les contraintes n'interviennent pas.

### 3.2. Conditions suffisantes

Si  $f$  et  $S$  sont convexes. Soit  $x^* \in S$  tel que  $\nabla f(x^*) \bullet y \geq 0 \forall y \in T(S, x^*)$  alors  $x^*$  est un minimum global de  $(P)$ .

exemple (suite):  $T(S, 0) = \{y: y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$  (cf. exemple paragraphe suivant).  $\nabla f(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\forall y \in T(S, 0) \nabla f(0) \bullet y = 2(y_1 + y_2) \geq 0$ , la condition d'optimalité est donc vérifiée.  $f$  et  $S$  étant convexes, cette condition est suffisante et l'origine est minimum global. Ce résultat peut se vérifier sur la figure 1.

## 4. Caractérisation du cône tangent

### 4.1. Introduction

On considère maintenant  $S = \{x: g_i(x) \leq 0 \ i=1, \dots, m, h_i(x) = 0 \ i=1, \dots, p\}$ .

Soit  $x \in S$ ,  $I(x) = \{i: g_i(x) = 0\}$  les indices des contraintes d'inégalité saturées en  $x$ .

On définit  $F(x) = \{y: \nabla g_i(x) \bullet y \leq 0 \ i \in I(x), \nabla h_i(x) \bullet y = 0 \ i=1, \dots, p\}$ .

théorème:  $T(S, x) \subseteq F(x)$ .

Il serait intéressant de savoir s'il est possible que  $T(S, x) = F(x)$  car dans ce cas on pourrait exprimer la condition nécessaire d'optimalité en fonction des gradients de  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $h_i(x)$ .

définition:  $x \in S$ , on dit que  $x$  est qualifié si  $T(S, x) = F(x)$

### 4.2. Contraintes d'égalité

On considère  $S = \{x: h_i(x) = 0 \ i=1, \dots, p\}$ .

On note  $F(x) = \{y: \nabla h_i(x) \bullet y = 0 \ i=1, \dots, p\}$



définition: l'espace tangent à  $S$  en  $x \in S$  est

$$E(S, x) = \left\{ y : \exists \gamma : R \rightarrow R^n \text{ } C^1 \text{ sur } I \text{ ouvert contenant } 0, \gamma(I) \subseteq S, \gamma(0) = x, \gamma'(0) = y \right\}$$

proposition: pour tout  $x \in S$ ,  $E(S, x) \subseteq T(S, x)$ .

En effet, pour  $k$  suffisamment grand, les suites  $x_k = \gamma\left(\frac{1}{k}\right)$ ,  $\lambda_k = \frac{1}{k}$  répondent aux critères voulus.

théorème:  $x \in S$ , si  $\nabla h_i(x)$  ( $i = 1, \dots, p$ ) sont linéairement indépendants alors  $x$  est qualifié.

démonstration

On montre que  $F(x) \subseteq E(S, x)$ . Soit  $y \in F(x)$ .

$$\text{Notation: } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}, \frac{\partial h}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

On considère le système de  $p$  équations à  $p+1$  inconnues  $(t, w)$ :  $h\left(x + ty + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right)^t w\right) = 0$

$(0,0)$  est une solution puisque  $h(x) = 0$ .

La matrice jacobienne du système par rapport à  $w$  au point  $(0,0)$  est  $\frac{\partial h}{\partial x}(x) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right)^t$ .

Elle est inversible (conséquence des gradients linéairement indépendants): d'après le théorème des fonctions implicites, le système d'équations admet une solution  $(t, w(t))$  pour  $t$  dans un voisinage ouvert de 0. En particulier  $w(0) = 0$ .

$w(t)$  est  $C^1$  et on obtient sa dérivée en 0 en dérivant le système par rapport à  $t$ :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x)y + \frac{\partial h}{\partial x}(x) \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right)^t w'(0) = 0$$

Mais  $\frac{\partial h}{\partial x}(x)y = 0$  par définition de  $y$ , ce qui implique  $w'(0) = 0$  (solution unique).

Finalement  $\gamma(t) = x + ty + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x)\right)^t w(t)$  est dans  $S$  et  $C^1$  pour  $t$  dans un voisinage ouvert de 0,  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = y$ .  $y$  satisfait les conditions requises. □

### 4.3. Contraintes d'égalité et d'inégalité

On considère  $S = \{x : g_i(x) \leq 0 \ i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0 \ i = 1, \dots, p\}$ .

On note  $F(x) = \{y : \nabla g_i(x) \bullet y \leq 0 \ i \in I(x), \nabla h_i(x) \bullet y = 0 \ i = 1, \dots, p\}$

On rappelle que  $I(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$  est l'ensemble des indices des contraintes d'inégalité saturées en  $x$ .

On définit  $F_0(x) = \{y : \nabla g_i(x) \bullet y < 0 \ i \in I(x), \nabla h_i(x) \bullet y = 0 \ i = 1, \dots, p\}$

#### Qualification de Cottle

théorème:  $x \in S$ , si  $\nabla h_i(x)$  ( $i = 1, \dots, p$ ) sont linéairement indépendants et  $F_0(x) \neq \emptyset$  alors  $x$  est qualifié.

démonstration

Si on montre que  $F_0(x) \subseteq T(S, x)$ , comme  $T(S, x)$  est fermé et  $F_0(x) \neq \emptyset$ , on aura  $\overline{F_0(x)} \subseteq T(S, x) \subseteq F(x) = \overline{F_0(x)}$ .

Montrons que  $F_0(x) \subseteq T(S, x)$ .

Notons  $S^\# = \{x: h_i(x) = 0 \ i = 1, \dots, p\}$  et  $F^\#(x) = \{y: \nabla h_i(x) \bullet y = 0 \ i = 1, \dots, p\}$ .

$x \in S^\#$ , d'après le cas des contraintes avec égalité on a:  $T(S^\#, x) = F^\#(x)$

Soit  $y \in F_0(x)$ .  $y \in F^\#(x)$  donc il existe les suites  $x_k \in S^\#$ ,  $\lambda_k > 0$  telles que  $x_k \rightarrow x$  et  $\lambda_k(x_k - x) \rightarrow y$ .

A partir d'un certain rang les  $x_k \in S$ . En effet, ils vérifient:

- les contraintes  $g_i(x) \leq 0 \ i \in I(x)$  en raison de la définition de  $y$  (faire un développement de Taylor à l'ordre 1 de  $g_i$ )

- les contraintes  $g_i(x) \leq 0 \ i \notin I(x)$  car  $x$  vérifie strictement ces contraintes.

$y$  vérifie les conditions requises pour appartenir  $T(S, x)$ .

□

#### 4.4. Autres critères de qualification

On propose ici des critères qui impliquent le critère de qualification de Cottle mais qui sont de vérification plus simple.

##### Qualification de Slater

théorème:  $x \in S$ , si

-  $g_i(x)$  convexe  $i \in I(x)$

-  $h_i(x)$  affine  $i = 1, \dots, p$  et si  $\nabla h_i(x) \ (i = 1, \dots, p)$  sont linéairement indépendants

-  $\exists x_0 \ g_i(x_0) < 0 \ i \in I(x), \ h_i(x_0) = 0 \ i = 1, \dots, p$

alors  $x$  est qualifié.

On montre que  $x_0 - x \in F_0(x)$

##### Qualification de l'indépendance linéaire

théorème:  $x \in S$ , si  $\nabla h_i(x) \ (i = 1, \dots, p)$ ,  $\nabla g_i(x) \ (i \in I(x))$  sont linéairement indépendants alors  $x$  est qualifié.

On montre, à l'aide du théorème de Gordan, que si  $F_0(x) = \emptyset$  alors les gradients sont liés.

Exemple: cherchons le cône tangent de  $S = \{x \in \mathbb{R}^2: g_1(x) = -x_1 \leq 0, g_2(x) = -x_2 \leq 0\}$  en l'origine. L'origine sature les 2 contraintes d'inégalité et  $I(0) = \{1, 2\}$ .

$\nabla g_1(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla g_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont linéairement indépendants donc

$T(S, 0) = \{y: \nabla g_1(0) \bullet y \leq 0, \nabla g_2(0) \bullet y \leq 0\} = \{y: y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ .

#### 5. Conditions d'optimalité du 1er ordre (Kuhn et Tucker)

On considère le problème  $(P)$  minimiser  $f(x)$   $x \in S$  avec  $S = \{x \in \mathbb{R}^n: g_i(x) \leq 0 \ i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0 \ i = 1, \dots, p\}$  ( $f, g, h$  de classe  $C^1$ ).

## 5.1. Conditions nécessaires

Théorème:

Si  $x^*$  est minimum local de  $(P)$  et si  $x^*$  est qualifié alors  $\exists \lambda_i \ i \in I(x^*)$ ,  $\exists \mu_i \ i = 1, \dots, p$  t.q.

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0 \ i \in I(x^*) \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0 \end{cases}$$

Pour le montrer on utilise la condition d'optimalité exprimée avec les vecteurs du cône tangent à  $S$  en  $x^*$  qui maintenant est caractérisé avec les gradients des contraintes. Le théorème de Farkas permet de conclure.

Remarque:  $x^*$  appartenant à  $S$  et point critique ( $\nabla f(x^*) = 0$ ) et  $\lambda = \mu = 0$  vérifient ces conditions. Mais ce n'est généralement pas l'unique solution.

On utilise souvent la formulation équivalente:

Si  $x^*$  est minimum local de  $(P)$  et si  $x^*$  est qualifié alors  $\exists \lambda_i \ i = 1, \dots, m$ ,  $\exists \mu_i \ i = 1, \dots, p$  t.q.

$$(K.T.) \begin{cases} \lambda_i \geq 0 \ i = 1, \dots, m \\ \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Ces dernières conditions  $\lambda_i g_i(x^*) = 0$  permettent d'annuler les  $\lambda_i$  associés aux contraintes d'inégalité non saturées car  $g_i(x^*) < 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ , et donc de retrouver la formulation initiale. Sachant que  $\forall i \ \lambda_i \geq 0, g_i(x^*) \leq 0$  elles peuvent s'écrire sous la forme plus condensée  $\lambda \bullet g(x^*) = 0$ . On les appelle conditions de complémentarité.

Les conditions (K.T.) sont appelées conditions de Kuhn-Tucker. Les  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

## 5.2. Conditions suffisantes

Sous certaines hypothèses de convexité, (K.T.) sont des conditions suffisantes d'optimalité globale.

Théorème:

Soient  $x^* \in S$ ,  $\lambda, \mu$  vérifiant (K.T.). Si  $\begin{cases} g_i \ i \in I(x^*) \text{ convexe,} \\ h_i \ i = 1, \dots, p \text{ affine (i.e. convexe et concave),} \\ f \text{ convexe} \end{cases}$  alors

$x^*$  est minimum global de  $(P)$ .

Pour le montrer on utilise la première caractérisation du 1er ordre des fonctions convexes.

Exemple: soit  $(P)$  minimiser  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sous les contraintes  $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

On met les contraintes sous la forme 
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0 \\ g_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Ecrivons les conditions de Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \lambda_1(-x_1 - x_2 + 1) = 0 \\ \lambda_2 x_1 = 0 \\ \lambda_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution telle que  $(x_1, x_2)$  vérifie les contraintes de  $(P)$ :

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_1 = 1, x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

Le point  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  est qualifié. On peut le voir très simplement de deux façons différentes:

- il y a en ce point une seule contrainte saturée  $g_1$  et  $\nabla g_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \neq 0$ : les conditions de l'indépendance linéaire sont satisfaites.

- ou encore  $f$  convexe,  $g_1$  la seule contrainte saturée est convexe,  $g_1(1, 1) < 0$ : les conditions de Slater sont satisfaites.

Le problème  $(P)$  vérifiant par ailleurs les conditions de convexité, les conditions de Kuhn-Tucker sont suffisantes et le point  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  est minimum (global).

## 6. Conditions d'optimalité du 2ème ordre

On suppose maintenant  $f, g, h$  de classe  $C^2$ .

### 6.1. Fonction de Lagrange

#### 6.1.1. Définition

La fonction de Lagrange  $L$  est constituée de l'objectif  $f$  plus une combinaison linéaire des contraintes d'inégalités  $g_i$  et d'égalités  $h_i$  du problème  $(P)$ .

$$L(x, \lambda, \mu) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x) = f(x) + \lambda \bullet g(x) + \mu \bullet h(x)$$

Si  $x^* \in S$ ,  $\lambda, \mu$  vérifient (K.T.) alors  $L(x^*, \lambda, \mu) = f(x^*)$ .

#### 6.1.2. Gradient par rapport à $x$

Le gradient (par rapport à  $x$ ) de la fonction de Lagrange est:

$$\nabla L(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x)$$

Les conditions (K.T.) peuvent s'exprimer avec le gradient de la fonction de Lagrange:

$$(K.T.) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \nabla L(x^*, \lambda, \mu) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

### 6.1.3. Hessien par rapport à $x$

Le hessien (par rapport à  $x$ ) de la fonction de Lagrange est:

$$HL(x, \lambda, \mu) = Hf(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i Hg_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i Hh_i(x)$$

### 6.2. Conditions nécessaires

Pour  $x^* \in S$ ,  $\lambda, \mu$  vérifiant les conditions nécessaires du 1er ordre de Kuhn-Tucker, on définit:

-  $I^+(x^*) = \{i \in I(x^*) : \lambda_i > 0\}$  les indices des inégalités saturées (par  $x^*$ ) dont le multiplicateur de Lagrange associé est non nul (appelées contraintes non dégénérées).

Puis on considère les ensembles de points  $x$  et de vecteurs  $y$ :

$$- S^+(x^*) = \left\{ x : \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0 \quad i \in I(x^*) \setminus I^+(x^*) \\ g_i(x) = 0 \quad i \in I^+(x^*) \\ h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \end{array} \right\}$$

$$- F^+(x^*) = F(x^*) \cap \left\{ y : \begin{array}{l} \nabla g_i(x^*) \bullet y \leq 0 \quad i \in I(x^*) \setminus I^+(x^*) \\ \nabla g_i(x^*) \bullet y = 0 \quad i \in I^+(x^*) \\ \nabla h_i(x^*) \bullet y = 0 \quad i = 1, \dots, p \end{array} \right\}$$

Notons que  $x^* \in S^+(x^*)$ . Si  $x^*$  vérifie la qualification de l'indépendance linéaire alors  $F^+(x^*)$  coïncide avec  $T(S^+(x^*), x^*)$  le cône tangent à  $S^+(x^*)$  en  $x^*$ .

#### Théorème

Si  $x^*$  est un minimum local du problème (P) et si  $x^*$  qualifié alors  $\exists \lambda, \mu$  tels que  $x^*, \lambda, \mu$  vérifient les conditions du 1er ordre (K.T.) et tels que le hessien de la fonction de Lagrange en  $x^*, \lambda, \mu$  est semi-défini positif sur le cône tangent à  $S^+(x^*)$  en  $x^*$  i.e.  $y \bullet HL(x^*, \lambda, \mu)y \geq 0 \quad \forall y \in T(S^+(x^*), x^*)$ .

remarque: si  $x^*$  vérifie la qualification de l'indépendance linéaire alors  $T(S^+(x^*), x^*) = F^+(x^*)$ .

Cette formulation explicite du cône tangent permet en pratique la vérification de la condition nécessaire.

remarque: dans le cas d'un problème comportant uniquement des contraintes d'inégalité, si  $I(x^*) = \emptyset$  alors  $\lambda = 0$  et la fonction de Lagrange coïncide avec  $f$ . La condition devient  $Hf(x^*)$  semi-défini positif (partout).

#### démonstration du théorème

$$\forall y \in T(S^+(x^*), x^*), \exists x_k \in S^+(x^*), \alpha_k > 0, x_k \rightarrow x^*, \alpha_k(x_k - x^*) \rightarrow y.$$

Sachant que les conditions du 1er ordre (K.T.) impliquent  $\lambda_i = 0 \quad \forall i \notin I(x^*)$ , les contraintes non saturées par  $x^*$  n'interviennent pas dans la fonction de Lagrange. Il en est de même des inégalités saturées d'indices  $i \in I(x^*) \setminus I^+(x^*)$  car dans ce cas aussi  $\lambda_i = 0$ . On a:

$$L(x_k, \lambda, \mu) = L(x^*, \lambda, \mu) + \nabla L(x^*, \lambda, \mu) \bullet (x_k - x^*) + \frac{1}{2}(x_k - x^*) \bullet HL(x^*, \lambda, \mu)(x_k - x^*) + \|x_k - x^*\|^2 \varepsilon(x_k - x^*)$$

$$x_k \in S^+(x^*) \Rightarrow L(x_k, \lambda, \mu) = f(x_k) \text{ et } x^* \in S, \lambda, \mu \text{ vérifiant (KT)} \Rightarrow L(x^*, \lambda, \mu) = f(x^*)$$

Les conditions du 1er ordre impliquent  $\nabla L(x^*, \lambda, \mu) = 0$

Pour  $k$  suffisamment grand,  $x_k \in S$  (car  $x_k$  tendant vers  $x^*$ , vérifie alors les contraintes non saturées par  $x^*$ ) et donc  $f(x_k) - f(x^*) \geq 0$  et par conséquent  $\frac{1}{2}(x_k - x^*) \bullet HL(x^*, \lambda, \mu)(x_k - x^*) + \|x_k - x^*\|^2 \varepsilon(x_k - x^*) \geq 0$

On multiplie cette inégalité par  $\alpha_k^2$  et on passe à la limite ( $k \rightarrow \infty$ ).

□

### 6.3. Conditions suffisantes

Pour  $x^* \in S$ ,  $\lambda, \mu$  vérifiant les conditions nécessaires du 1er ordre de Kuhn-Tucker, on considère les ensembles:

- $I^+(x^*)$  indices des inégalités saturées de multiplicateur de Lagrange non nul
- $S^+(x^*)$  et  $F^+(x^*)$

définis plus haut pour les conditions nécessaires (du 2ème ordre).

**Théorème**

Soit  $x^* \in S$ . Si  $x^*, \lambda, \mu$  vérifient les conditions nécessaires du 1er ordre (K.T.) et si le hessien de la fonction de Lagrange en  $x^*, \lambda, \mu$  est défini positif sur  $F^+(x^*)$  c'est-à-dire  $y \bullet HL(x^*, \lambda, \mu)y > 0 \quad \forall y \in F^+(x^*) (y \neq 0)$  alors  $x^*$  est un minimum local strict du problème (P).

**Remarque**

Si  $x^*$  vérifie la qualification de l'indépendance linéaire alors  $T(S^+(x^*), x^*) = F^+(x^*)$ . Dans ce cas l'ensemble sur lequel la positivité du hessien de la fonction de Lagrange doit être vérifiée est le même dans les conditions nécessaires et dans les conditions suffisantes. Sinon l'ensemble des  $y$  pour lequel le hessien doit être défini positif s'agrandit dans les conditions suffisantes car le cône tangent  $T(S^+(x^*), x^*)$  est inclu dans  $F^+(x^*)$  mais l'égalité n'est plus garantie.

démonstration du théorème

- Supposons que  $x^*$  ne soit pas un minimum local strict:  $\forall k \exists x_k (\neq x^*) \in B(x^*, \frac{1}{k}) \cap S$  tel que  $f(x_k) \leq f(x^*)$ . On construit ainsi une suite  $x_k$  de  $S$  qui tend vers  $x^*$  telle que  $f(x_k) \leq f(x^*)$  pour tout  $k$ . Posons  $y_k = \alpha_k(x_k - x^*)$  avec  $\alpha_k = \frac{1}{\|x_k - x^*\|}$  donc  $\|y_k\| = 1$ . La suite  $y_k$  étant bornée il existe une sous-suite qui converge. Pour simplifier les notations supposons que la suite  $y_k$  elle-même converge vers un point  $y$ . Alors  $y \in T(S, x^*)$  ( $x_k, \alpha_k$  remplissent les critères voulus).

- On a  $y \in T(S, x^*) \subseteq F^+(x^*)$ , montrons que  $y \in F^+(x^*)$ . Pour cela il reste à montrer que  $\nabla g_i(x^*) \bullet y = 0 \quad i \in I^+(x^*)$ .  $y \in F^+(x^*)$  et les conditions (K.T.) entraînent  $\nabla f(x^*) \bullet y = - \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) \bullet y - \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x^*) \bullet y = - \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) \bullet y \geq 0$ .

Par ailleurs  $f(x_k) \leq f(x^*)$  pour tout  $k$  entraîne que  $\nabla f(x^*) \bullet y \leq 0$ . Par conséquent  $\sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) \bullet y = 0$ . La non-positivité de chacun des termes de la somme entraîne  $\lambda_i \nabla g_i(x^*) \bullet y = 0$   $i \in I(x^*)$  et finalement  $\nabla g_i(x^*) \bullet y = 0$   $i \in I^+(x^*)$ .

- Montrons que le hessien de la fonction de Lagrange n'est pas défini positif sur  $F^+(x^*)$ .

$$L(x_k, \lambda, \mu) - L(x^*, \lambda, \mu) = f(x_k) + \lambda \bullet g(x_k) - f(x^*) \leq 0$$

Les conditions du 1er ordre impliquent  $\nabla L(x^*, \lambda, \mu) = 0$ .

Par conséquent:

$$L(x_k, \lambda, \mu) - L(x^*, \lambda, \mu) = \frac{1}{2}(x_k - x^*) \bullet HL(x^*, \lambda, \mu)(x_k - x^*) + \|x_k - x^*\|^2 \varepsilon(x_k - x^*) \leq 0$$

On multiplie cette inégalité par  $\alpha_k^2$  et on passe à la limite ( $k \rightarrow \infty$ ). On en déduit que  $y \bullet HL(x^*, \lambda, \mu)y \leq 0$ .

□

Remarque:  $y$  appartenant à  $F^+(x^*)$  vérifie  $\nabla g_i(x^*) \bullet y \leq 0$  pour tout  $i \in I(x^*) \setminus I^+(x^*)$ . Si  $I(x^*) \setminus I^+(x^*)$  contient un seul et unique élément alors cette condition peut-être retirée sans pour autant affaiblir les conditions puisque si  $y \bullet HL(x^*, \lambda, \mu)y > 0$  alors de même  $(-y) \bullet HL(x^*, \lambda, \mu)(-y) > 0$  et le vecteur  $-y$  est de l'autre côté de l'hyperplan de normale  $\nabla g_i(x^*)$  c'est-à-dire  $\nabla g_i(x^*) \bullet (-y) \geq 0$ .

Exemple: considérons le problème minimiser  $-x_1x_2$  sous la contrainte  $\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \leq 1$

Les conditions nécessaires du 1er ordre sont:

$$\lambda \geq 0 \quad (1)$$

$$-\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

$$\lambda \left( \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 1 \right) = 0 \quad (3)$$

1er cas :  $\lambda = 0$ . (2) implique  $x_2 = x_1 = 0$ .

2ème cas:  $\lambda > 0$ . (3) entraîne  $x_1^2 + x_2^2 = 2$  (4). (2) entraîne  $x_2 = \lambda x_1, x_1 = \lambda x_2$ . On en déduit en reportant dans (4)  $\lambda^2 = 1$ , (1) impose l'unique solution  $\lambda = 1$ . On en déduit  $x_2 = x_1$  qui avec (4) donne deux solutions  $x_2 = x_1 = 1$  et  $x_2 = x_1 = -1$ .

Vérifions les conditions du second ordre.

Pour le point  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  la contrainte n'est pas saturée. Par conséquent le hessien de la fonction de Lagrange en  $x_2 = x_1 = \lambda = 0$  coïncide avec le hessien de  $f$  et  $HL(0,0,0) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  doit être semi-défini positif sur  $R^2$ . Ce n'est pas le cas donc  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  n'est pas un minimum.

Pour le point  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $F^+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{y: y_1 + y_2 = 0\}$ . Le hessien en  $x_2 = x_1 = \lambda = 1$  de la fonction de Lagrange est  $HL(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\forall y \in \{y: y_1 + y_2 = 0\}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 = (y_1 - y_2)^2 = (2y_1)^2$$

Cette quantité est positive ou nulle et s'annule seulement pour  $y_1 = 0$ . Donc le hessien de la fonction de Lagrange est défini positif sur  $F^+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On a un minimum local strict.

Incidentement le point  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vérifie la qualification de l'indépendance linéaire donc le cône tangent à la surface  $\{x: x_1^2 + x_2^2 = 2\}$  en ce point est  $\{y: y_1 + y_2 = 0\}$ .

Pour le point  $-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  les résultats sont identiques.

D'autre part l'ensemble  $S$  des solutions réalisables est compact. La fonction à minimiser étant continue, le problème admet une solution nécessairement parmi les minimum locaux  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Les deux points donnant la même valeur ce sont les deux solutions du problème.

## 7. Résumé

On peut observer une certaine symétrie entre le rôle joué par  $f$  et ses dérivées dans le cas des problèmes sans contraintes et la fonction de Lagrange et ses dérivées dans le cas des problèmes sous contraintes. Les conditions d'optimalité (locale) sont résumées dans le tableau suivant.

Conditions d'optimalité	problèmes sans contraintes	problèmes sous contraintes
fonction à considérer	$f(x)$	$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda \cdot g(x) + \mu \cdot h(x)$
conditions nécessaires (1er ordre)	- $\nabla f(x^*) = 0$	- $\lambda \geq 0$ - $\nabla L(x^*, \lambda, \mu) = 0$ - $\lambda \cdot g(x^*) = 0$
conditions nécessaires (2ème ordre)	- conditions nécessaires du 1er ordre - $Hf(x^*)$ semi défini positif	- conditions nécessaires du 1er ordre - $HL(x^*, \lambda, \mu)$ semi défini positif sur le cône tangent à $S^+(x^*)$ en $x^*$
conditions suffisantes	- conditions nécessaires du 1er ordre - $Hf(x^*)$ défini positif	- conditions nécessaires du 1er ordre - $HL(x^*, \lambda, \mu)$ défini positif sur le cône tangent à $S^+(x^*)$ en $x^*$ (si qualif. de l'indépendance linéaire)



## Dualité lagrangienne

### 1. Problème primal, problème dual

Problème primal ( $P$ ): minimiser  $f(x)$  sous les contraintes  $g(x) \leq 0, h(x) = 0, x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\text{où } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

$X$  est une partie quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple:  $\mathbb{R}^n$ , un ensemble discret (nombres entiers naturels par exemple), ou encore un ensemble défini par des contraintes d'inégalité ou d'égalité autres que  $g$  et  $h$ .

A partir de ( $P$ ) on définit un autre problème: le problème dual.

Problème dual ( $D$ ): maximiser  $\theta(u, v) = \inf \{f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) : x \in X\}$  sous les contraintes  $u \geq 0$

$L(x, u, v) = f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x)$  est appelée fonction de Lagrange

$\theta(u, v) = \inf_{x \in X} L(x, u, v)$  est appelée fonction duale

propriété: la fonction duale est concave.

Une conséquence très importante est que tout maximum local du problème dual ( $D$ ) est maximum global de ( $D$ ) c'est-à-dire solution de ( $D$ ).

### 2. Relation entre primal et dual

Théorème de dualité (faible)

Si  $x$  est une solution réalisable de ( $P$ ) et si  $(u, v)$  est une solution réalisable de ( $D$ ) alors  $f(x) \geq \theta(u, v)$ .

Corollaire

Si  $x$  est une solution réalisable de ( $P$ ) et si  $(u, v)$  est une solution réalisable de ( $D$ ) telles que  $f(x) = \theta(u, v)$  alors  $x$  est une solution (optimale) de ( $P$ ) et  $(u, v)$  est une solution (optimale) de ( $D$ )

### 3. Points selles

#### 3.1. définition

Soient  $x^* \in X, u^* \geq 0$ .  $(x^*, u^*, v^*)$  est un point selle ssi:

$$L(x^*, u, v) \leq L(x^*, u^*, v^*) \leq L(x, u^*, v^*) \quad \forall x \in X, \forall u \geq 0$$

### 3.2. Caractérisation des points selles

Soient  $x^* \in X, u^* \geq 0$ .  $(x^*, u^*, v^*)$  est un point selle ssi

$$\begin{cases} 1) L(x^*, u^*, v^*) = \inf_{x \in X} L(x, u^*, v^*) \\ 2) g(x^*) \leq 0, h(x^*) = 0 \\ 3) u_i^* g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Remarque:  $u^* \geq 0$  et 2) entraînent que 3) est équivalent à  $u^* \bullet g(x^*) = 0$ .

### 3.3. théorème de dualité (fort)

Si  $(x^*, u^*, v^*)$  est un point selle alors  $x^*$  est une solution (optimale) de  $(P)$  et  $(u^*, v^*)$  est une solution (optimale) de  $(D)$

En effet  $x^*$  est une solution réalisable de  $(P)$  en raison de la caractéristique 2). De plus les caractéristiques 2), 3) et 1) permettent d'établir les égalités suivantes:

$$f(x^*) = f(x^*) + u^* \bullet g(x^*) + v^* \bullet h(x^*) = L(x^*, u^*, v^*) = \inf_{x \in X} L(x, u^*, v^*) = \theta(u^*, v^*)$$

La conclusion découle du corollaire du théorème de la dualité faible.

## 4. Relations entre optimums du dual et du primal et point selle

théorème

Soit  $(\bar{u}, \bar{v})$  une solution (optimale) de  $(D)$ . Si la fonction de Lagrange admet un point selle alors il existe  $x^*$  une solution (optimale) de  $(P)$  telle que  $(x^*, \bar{u}, \bar{v})$  soit un point selle.

corollaire

Soit  $(\bar{u}, \bar{v})$  une solution (optimale) de  $(D)$ . Si la fonction de Lagrange admet un point selle et si  $L(x, \bar{u}, \bar{v})$  admet un minimum unique  $\bar{x}$  sur  $X$  alors  $\bar{x}$  est solution (optimale) de  $(P)$ .

Application: résolution de  $(P)$ .

si on sait que la fonction de Lagrange admet un point selle

- on résout  $(D)$ . On obtient  $(\bar{u}, \bar{v})$ .

- on résout minimiser  $L(x, \bar{u}, \bar{v})$   $x \in X$ . Si  $\bar{x}$  est l'unique solution alors  $\bar{x}$  est solution de  $(P)$ .

Il faut savoir que:

si  $(P)$  a une solution alors

- sous les hypothèses de convexité de l'ensemble des solutions réalisables de  $(P)$  (i.e. les  $g_i$  convexes, les  $h_i$  affines,  $X$  convexe) et de convexité de  $f$ ,

- plus sous les hypothèses de superconsistance suivantes:  $\begin{cases} - \exists \tilde{x} \in X \quad g(\tilde{x}) < 0, h(\tilde{x}) = 0 \\ - 0 \in \text{intérieur de } h(X) \end{cases}$

il existe un point selle.

## 5. Relation entre points selles et conditions de Kuhn et Tucker

On suppose ici  $X=R^n$

Si  $(x^*, u^*, v^*)$  est un point selle alors il vérifie les conditions de Kuhn et Tucker.

En effet  $L(x, u^*, v^*)$  admet un minimum en  $x^*$  et donc  $\nabla L(x^*, u^*, v^*) = 0$ . Ce qui donne les conditions de Kuhn et Tucker.

Réciproquement si  $x^*$  est une solution réalisable de  $(P)$  et  $(x^*, u^*, v^*)$  vérifie les conditions de Kuhn-Tucker et si la condition  $\nabla L(x^*, u^*, v^*) = 0$  ( $x^*$  point critique de  $L(x, u^*, v^*)$ ) implique que  $x^*$  est un minimum global de  $L(x, u^*, v^*)$  alors la propriété caractéristique n°1 des points selles est vérifiée. Les deux autres propriétés caractéristiques étant vérifiées on en déduit que  $(x^*, u^*, v^*)$  est un point selle.

C'est par exemple le cas si  $f, g_i$  telles que  $u_i^* > 0$  sont convexes,  $h_i$  telles que  $v_i^* \neq 0$  sont affines car alors  $L(x, u^*, v^*)$  est convexe.

Exemple: soit  $(P)$  minimiser  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sous les contraintes  $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

On met les contraintes sous la forme  $\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0 \\ g_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0 \end{cases}$

Ici  $X = R^n$ .

La fonction de Lagrange est  $L(x, u) = x_1^2 + x_2^2 + u_1(-x_1 - x_2 + 1) + u_2(-x_1) + u_3(-x_2)$

La fonction duale est  $\theta(u) = \inf \{ L(x, u) : x \in R^n \}$

Explicitons la fonction duale. Pour cela cherchons un point critique de  $L(x, u)$  ( $u$  constant):

$$\begin{cases} 2x_1 - u_1 - u_2 = 0 \\ 2x_2 - u_1 - u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{u_1 + u_2}{2} \\ x_2 = \frac{u_1 + u_3}{2} \end{cases}$$

On en déduit:  $\theta(u) = -\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{4} - \frac{u_3^2}{4} - \frac{u_1 u_2}{2} - \frac{u_1 u_3}{2} + u_1$

On remarque que  $\theta(u)$  est bien concave (on vérifie que son hessien est défini négatif).

Le problème dual  $(D)$  est: maximiser  $\theta(u)$  sous les contraintes  $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0$

Résolvons le problème dual. Pour cela réécrivons  $(D)$  en un problème  $(D')$  de type minimiser:

minimiser  $\frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{4} + \frac{u_3^2}{4} + \frac{u_1 u_2}{2} + \frac{u_1 u_3}{2} - u_1$  sous les contraintes  $-u_1 \leq 0, -u_2 \leq 0, -u_3 \leq 0$

Ecrivons les conditions de Kuhn et Tucker:

$$\begin{cases} u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{2} - 1 - \lambda_1 = 0 \\ \frac{u_2}{2} + \frac{u_1}{2} - \lambda_2 = 0 \\ \frac{u_3}{2} + \frac{u_1}{2} - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_i \geq 0 \quad (i=1, 2, 3) \\ \lambda_i u_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \end{cases}$$

Ce système admet une solution telle que  $(u_1, u_2, u_3)$  vérifie les contraintes de  $(D)$ :

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}, u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$ .

Les hypothèses de qualification sont satisfaites puisque les conditions de l'indépendance linéaire sont satisfaites.

Le problème  $(D')$  vérifiant par ailleurs les conditions de convexité, les conditions de Kuhn-Tucker sont suffisantes et le point  $(1,0,0)$  est minimum (global) donc maximum (global) pour  $(D)$ .

$\inf \left\{ L(x, (1,0,0)) : x \in R^n \right\}$  est atteint par le point  $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Il est unique donc c'est la solution de  $(P)$  (les hypothèses de convexité et de superconsistance étant vérifiées on sait que la fonction de Lagrange admet un point selle).

Remarquons que  $\theta(1,0,0) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  et que  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = u_3 = 0$  vérifient les conditions de Kuhn-Tucker de  $(P)$ .

## 6. Résolution du problème dual

### 6.1. Algorithme de sous-gradient

#### 6.1.1. Sous-gradient de la fonction duale

Notons:  $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \beta(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix}, X(w) = \{x \in X : f(x) + w \bullet \beta(x) = \theta(w)\}$ .

Le théorème suivant montre comment, une fois résolu le problème de minimisation évaluant  $\theta$  en  $w$ , on peut obtenir simplement un sous-gradient de  $\theta$  en  $w$ .

Théorème:  $\forall x \in X(w), \beta(x) \in \partial\theta(w)$ .

Théorème: Si  $\theta(w)$  est différentiable en  $w$  alors  $\partial\theta(w)$  comporte un seul élément à savoir  $\nabla\theta(w)$  le gradient en  $w$ .

On déduit des deux précédents théorèmes que si  $\theta(w)$  est différentiable en  $w$  et si  $X(w) \neq \emptyset$  alors  $X(w)$  comporte un unique élément  $x$  et  $\beta(x) = \nabla\theta(w)$ .

Remarquons que  $\theta(w)$  différentiable en  $w$  n'implique pas  $X(w) \neq \emptyset$ . Considérer le problème minimiser  $e^{-y}$  sous la contrainte  $\sqrt{x^2 + y^2} - x \leq 0$ . La fonction duale est  $\theta(u) = \inf_{x,y} \left\{ e^{-y} + u \left( \sqrt{x^2 + y^2} - x \right) \right\} = 0 \quad \forall u \geq 0$  (identiquement nulle) et  $X(u) = \emptyset \quad \forall u \geq 0$ .

Théorème: si  $\theta(w)$  est différentiable en  $w$  solution (optimale) du problème dual et si  $x \in X(w) \neq \emptyset$  alors  $(x, w)$  est un point selle.

#### 6.1.2. Maximisation de la fonction duale

On cherche ici à résoudre le problème dual c'est-à-dire maximiser la fonction duale sous la contrainte que certaines des variables doivent être positives ou nulles. La simplicité de ces contraintes fait que l'on peut adapter l'algorithme de plus forte pente utilisé dans le cas de l'optimisation sans contraintes. La différence est qu'on utilise un sous-gradient à la place du gradient et que l'on interdit les déplacements qui rendraient négatives des variables astreintes à être positives ou nulles.

Algorithme de sous-gradient (algorithme d'Uzawa)

On se donne une suite de nombres réels  $\rho^{(k)} > 0$ .

Soit  $w^{(0)} = \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ v^{(0)} \end{pmatrix}$  avec  $u^{(0)} \geq 0, k=0$ .

1) résoudre le problème  $\min_{x \in X} f(x) + w^{(k)} \bullet \beta(x)$ : soit  $x^{(k)}$  une solution.

$w^{(k+1)} = P(w^{(k)} + \rho^{(k)} \beta(x^{(k)}))$  où  $P(\cdot)$  est la projection sur  $K = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} : y \in R^m, y \geq 0, z \in R^p \right\}$

si  $w^{(k+1)} = w^{(k)}$  alors STOP

sinon  $k=k+1$  et aller en 1)

La condition d'arrêt  $w^{(k+1)} = w^{(k)}$  implique que  $(x^{(k)}, w^{(k)})$  est un point selle. Ceci se montre en utilisant la caractérisation de la projection sur le cône convexe  $K$ .

On remarque que les conditions caractéristiques 2) et 3) des points selles  $g(x^{(k)}) \leq 0, h(x^{(k)}) = 0, u^{(k)} \bullet g(x^{(k)}) = 0$  sont les conditions d'optimalité de la maximisation sur  $K$  d'une fonction différentiable où le sous-gradient  $\beta(x^{(k)})$  joue le rôle du gradient.

Les choix possibles de  $\rho^{(k)}$  sont:

- constant  $\rho^{(k)} = \rho \forall k$

- la série divergente  $\rho^{(k)} \rightarrow 0, \sum_k \rho^{(k)} = +\infty$

**Théorème**

Dans le cas de la minimisation d'une fonction quadratique  $f(x) = \frac{1}{2} x \bullet Ax - b \bullet x$  ( $A$  définie positive) sous des contraintes d'inégalité affines  $Dx - d \leq 0$  ( $D$  de rang  $m$ ) et  $X = R^n$ , dans le cas du choix  $\rho^{(k)} = \rho \forall k$ , si  $\rho \in \left] 0, \frac{\lambda_{\min}(A)}{\|D\|^2} \right]$  ( $\lambda_{\min}(A)$  est la plus petite valeur propre de  $A$ ) alors la suite  $(x^{(k)}, w^{(k)})$  converge vers  $(x^*, w^*)$  un point selle.

Exemple: appliquons l'algorithme d'Uzawa au dual du problème minimiser  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

sous les contraintes  $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$  en partant de  $u^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  avec le pas constant  $\rho = 1$ .

On pose:  $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \\ g_3(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 + 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ .

itération 1

On minimise  $x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$   $(x_1, x_2) \in R^2$ . La fonction étant convexe et soumise à aucune contrainte, il suffit de chercher un point critique:  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ . Ce qui donne  $\theta(0, 1, 1) = -\frac{1}{2}$

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

itération 2

On minimise  $x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$   $(x_1, x_2) \in R^2$ . La solution est  $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$ . Ce qui donne  $\theta(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

itération 3

On minimise  $x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{2}$   $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . La solution est  $x_1 = x_2 = \frac{3}{8}$ . Ce qui donne  $\theta(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{7}{32}$

$$u^{(2)} + g(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}. \text{ En projetant sur } K = (\mathbb{R}^+)^3 \text{ on obtient: } u^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

itération 4

On minimise  $x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{4}$   $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . La solution est  $x_1 = x_2 = \frac{3}{8}$ . Ce qui donne  $\theta(\frac{3}{4}, 0, 0) = \frac{15}{32}$

$$u^{(3)} + g(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}. \text{ En projetant on obtient: } u^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

itération 5

On minimise  $x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1$   $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . La solution est  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ . Ce qui donne  $\theta(1, 0, 0) = \frac{1}{2}$

$$u^{(4)} + g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ En projetant on obtient: } u^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$u^{(5)} = u^{(4)}$  donc on arrête.

Vérifions que  $(x^*, u^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0)$  est un point selle:

- les relations de complémentarités 3) sont vérifiées:  $u^* \bullet g(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$

- la condition 2) ( $x^*$  réalisable) est vérifiée:  $g(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \leq 0$

- la condition 1) ( $x^*$  minimise la fonction de Lagrange  $L(x, u^*)$  en  $u^*$ ) est vérifiée par définition de  $x^*$ .

On a mentionné à titre indicatif (elles n'interviennent pas dans l'algorithme) les valeurs de la fonction duale en chacun des points parcourus. On constate que la fonction duale augmente à chaque itération.

On notera l'importance du choix de  $\rho$ . Par exemple si on prend  $\rho = 2$  pour le même problème, en partant du même point, l'algorithme cycle (c'est-à-dire repasse toujours par un même point) sans jamais atteindre le point selle.

## 6.2. Méthode des plans sécants

Le problème dual ( $D$ ) peut s'écrire:

maximiser  $z$

sous les contraintes  $\begin{cases} z \leq f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) & \text{pour tout } x \in X \\ u \geq 0 \end{cases}$

En effet, pour  $u, v$  fixés, si  $z$  est maximum alors  $z = \inf \{f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) : x \in X\} = \theta(u, v)$ . Donc le problème ci-dessus revient à maximiser la fonction duale  $\theta(u, v)$  sous les conditions  $u \geq 0$  soit au problème dual.

Ce problème est un problème linéaire (en les variables  $z, u, v$ ) qui comporte autant de contraintes (en dehors des contraintes  $u \geq 0$ ) qu'il y a d'éléments dans  $X$  (en particulier cardinal de  $X$  peut être infini).

C'est pourquoi à la place de ( $D$ ), on résout une relaxation de ( $D$ ) où seulement quelques contraintes sont prises en compte. Si la solution obtenue vérifie toutes les contraintes c'est fini sinon on rajoute une contrainte non vérifiée et on réitère.

algorithme:

soit  $X^{(0)}$  contenant quelques éléments de  $X$ ,  $k \leftarrow 0$ .

(1) on résout le problème maître:

maximiser  $z$

sous les contraintes  $\begin{cases} z \leq f(x) + u \bullet g(x) + v \bullet h(x) & \text{pour tout } x \in X^{(k)} \\ u \geq 0 \end{cases}$

Soit  $z^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}$  une solution. Pour tester si cette solution vérifie toutes les contraintes de ( $D$ ),

on résout le sous-problème:  $z^* = \min_{x \in X} \{f(x) + u^{(k)} \bullet g(x) + v^{(k)} \bullet h(x)\}$

Si  $z^{(k)} \leq z^*$

alors STOP (on a résolu ( $D$ ))

sinon

soit  $x^{(k)}$  une solution du sous-problème

$X^{(k+1)} \leftarrow X^{(k)} + \{x^{(k)}\}$  (on rajoute une contrainte au problème maître)

$k \leftarrow k + 1$  et aller en (1)

Exemple: appliquons l'algorithme des plans sécants au dual du problème minimiser

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sous les contraintes  $\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\ (x_1, x_2) \in X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \end{cases}$

Partons avec  $X^{(0)} = \{(0, 0), (1, 1)\}$ .

itération  $k=0$ :

Le problème maître est: maximiser  $z$  s.c.  $\begin{cases} z \leq u_1 \\ z \leq 2 - u_1 \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$

La solution est  $z^{(0)} = 1, u_1^{(0)} = 1$ .

Le sous-problème est:  $z^* = \min_{x \in X} \{x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1\} = \frac{1}{2}$

La solution est  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \frac{1}{2}$ .  $z^{(0)} > z^*$  donc on rajoute au problème maître, la contrainte engendrée par  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \frac{1}{2}$  i.e.  $X^{(1)} = \{(0, 0), (1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ .

itération  $k=1$ :

Le problème maître est: maximiser  $z$  s.c. 
$$\begin{cases} z \leq u_1 \\ z \leq 2 - u_1 \\ z \leq \frac{1}{2} \\ u_1 \geq 0 \end{cases}$$

$z^{(1)} = \frac{1}{2}, u_1^{(1)} = 1$  est une solution.

Le sous-problème est:  $z^* = \min_{x \in X} \{x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 + 1\} = \frac{1}{2}$

$z^{(1)} \leq z^*$  donc on arrête. L'optimum du dual vaut  $\frac{1}{2}$  et est atteint pour  $u_1 = 1$ .



## Méthodes primales

### 1. Introduction

On va considérer ici deux méthodes. On les qualifie de primales car elles atteignent la solution du problème par déplacements successifs dans l'ensemble des solutions réalisables c'est-à-dire respectant à chaque itération les contraintes du problème primal. L'avantage d'avoir à chaque itération une solution réalisable est que si l'on peut se contenter d'une solution sous-optimale on peut interrompre l'algorithme avant terme. L'inconvénient est que dans le cas de contraintes quelconques la mise en oeuvre est difficile. On se restreindra ici au cas où l'ensemble des solutions réalisables est un polyèdre (contraintes linéaires). Les deux méthodes s'étendent à des problèmes soumis à des contraintes quelconques mais sont alors de mise en oeuvre plus délicate.

### 2. Méthode du gradient projeté

#### 2.1. notations, définitions

On considère le problème: minimiser  $f(x)$  sous les contraintes  $a_i \bullet x \leq b_i$  ( $i \in I$ ),  $a_i \bullet x = b_i$  ( $i \in J$ ) où  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ ,  $I$  et  $J$  finis. Les contraintes d'inégalité sont non singulières ( $\forall i \in I, \exists x$  réalisable t.q.  $a_i \bullet x < b_i$ ).

Pour tout  $x$  solution réalisable  $I(x)$  est l'ensemble des indices des contraintes d'inégalité saturées par  $x$ . On fait l'hypothèse que  $x$  vérifie le critère de qualification de l'indépendance linéaire c'est-à-dire que les vecteurs  $a_i$   $i \in I(x) \cup J$  sont linéairement indépendants.

#### 2.2. principe de la méthode

On part d'un  $x$  solution réalisable. On détermine la direction  $d$  définie par la projection de  $-\nabla f(x)$  sur l'espace  $L = \{y: a_i \bullet y = 0 \text{ } i \in I(x) \cup J\}$ :  $d = P_L(-\nabla f(x))$  où  $P_L$  est l'opérateur de projection orthogonale sur  $L$ .  $-\nabla f(x)$  se décompose dans  $L + L^\perp$ :  $-\nabla f(x) = d + \sum_{i \in I(x) \cup J} \lambda_i a_i$ . Par

construction, le déplacement dans la direction  $d$  ne viole pas les contraintes saturées. Si  $d \neq 0$  le déplacement se fait jusqu'à atteindre le minimum de  $f$  dans la direction  $d$  mais en respectant les contraintes non saturées. On obtient un nouveau point et on réitère. Si  $d=0$  alors  $-\nabla f(x) = \sum_{i \in I(x) \cup J} \lambda_i a_i$ . Si  $\forall i \in I(x) \lambda_i \geq 0$  alors les conditions de Kuhn-Tucker sont vérifiées et on

arrête. Si  $\exists j \in I(x) \lambda_j < 0$  alors cela signifie que la contrainte  $j$  est inactive sur  $x$ . On la retire de  $I(x)$  et on réitère.

#### 2.3. algorithme

soit  $x$  une solution réalisable

1) déterminer  $I(x)$

2) déterminer  $P_L$  l'opérateur de projection sur  $L = \{y: a_i \bullet y = 0 \text{ } i \in I(x) \cup J\}$

$d = P_L(-\nabla f(x))$

si  $d \neq 0$  alors

$\alpha_1 = \max\{\alpha \geq 0: x + \alpha d \text{ réalisable}\}$

soit  $\alpha_2$  solution de minimiser  $f(x + \alpha d)$  sous la contrainte  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$

$x \leftarrow x + \alpha_2 d$

aller en 1)

si  $d=0$  alors

déterminer les coordonnées  $\lambda_i$  de  $-\nabla f(x)$  dans la base des  $a_i$   $i \in I(x) \cup J$  i.e.

$$-\nabla f(x) = \sum_{i \in I(x) \cup J} \lambda_i a_i$$

Si  $\forall i \in I(x)$   $\lambda_i \geq 0$  alors les conditions de Kuhn-Tucker sont vérifiées. FIN.

Sinon soit  $j \in I(x)$   $\lambda_j < 0$ ,  $I(x) \leftarrow I(x) - \{j\}$ , aller en 2)

Remarques pratiques:

- le choix habituel de  $j$  consiste à prendre celui tel que  $\lambda_j$  est le plus petit (le plus négatif)

- l'opérateur  $P_L$  est déterminé par  $P_L = I - A^t (AA^t)^{-1} A$  où  $A$  est la matrice constituée des lignes  $a_i$   $i \in I(x) \cup J$ . De plus  $\lambda = (AA^t)^{-1} A(-\nabla f(x))$ . Sous l'hypothèse de l'indépendance linéaire des  $a_i$   $i \in I(x) \cup J$ ,  $AA^t$  est inversible.

Exemple: soit  $(P)$  minimiser  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sous les contraintes  $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

On met les contraintes sous la forme  $\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$

Itération 1.

Partons de  $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\nabla f(P_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On projète  $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$  sur  $L = \{y: y_2 = 0\}$ , on obtient  $d = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Déterminons le déplacement maximum:  $\left. \begin{matrix} 2 - 4\alpha \geq 1 \\ 2 - 4\alpha \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \alpha \leq \frac{1}{4} \\ \alpha \leq \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$  (la troisième contrainte

n'intervient pas par construction de  $d$ ).

Le minimum de  $f(2 - 4\alpha, 0)$  sous la contrainte  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$  est atteint en  $\alpha_2 = \frac{1}{4}$

Itération 2.

Nous obtenons le nouveau point  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $\nabla f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On projète  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  sur

$L = \{y: y_1 + y_2 = 0, y_2 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ , on obtient  $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Cherchons les coordonnées de

$-\nabla f(P_1)$  dans la base  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On a:  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , ce qui montre que la

contrainte  $-x_2 \leq 0$  n'est pas active. On projète  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  sur le nouveau  $L = \{y: y_1 + y_2 = 0\}$ , on

obtient  $d = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Déterminons le déplacement maximum:  $\left. \begin{matrix} 1 - \alpha \geq 0 \\ \alpha \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha_1 = 1$  (la

première contrainte n'intervient pas par construction de  $d$ ).

Le minimum de  $f(1 - \alpha, \alpha)$  sous la contrainte  $0 \leq \alpha \leq 1$  est atteint en  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$

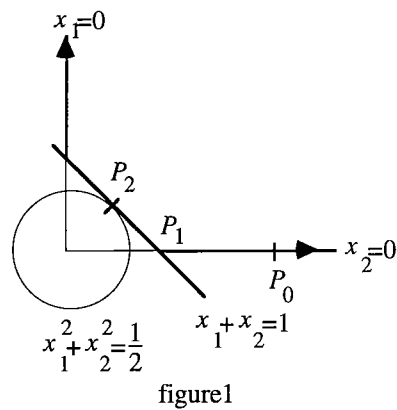
Itération 3.

Nous obtenons le nouveau point  $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .  $\nabla f(P_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On projète  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  sur

$L = \{y: y_1 + y_2 = 0\}$ , on obtient  $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . La coordonnée de  $-\nabla f(P_2)$  dans la base  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est 1.

On arrête.

Les différents points parcourus sont représentés sur la figure 1.



### 3. méthode du gradient réduit

#### 3.1. Notations, définitions

On considère le problème: minimiser  $f(x)$  sous les contraintes  $Ax=b, x \geq 0$  où  $f:R^n \rightarrow R$  est de classe  $C^1$ ,  $A$  est une matrice  $m$  lignes,  $n$  colonnes de rang  $m < n$ ,  $b$  un vecteur de dimension adéquate.

Rappelons que, quelque soit le polyèdre initial, il est toujours possible de se ramener à ce type de contraintes.

On définit une partition des variables en  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$  et  $N = \{1, \dots, n\} - B$  telle que  $|B|=m$  et  $A_B$ , la matrice formée des colonnes de  $A$  indexées dans  $B$ , soit inversible.

Quitte à permuter les colonnes,  $A$  se décompose en  $(A_B \ A_N)$  où  $A_N$  est la matrice formée des colonnes de  $A$  indexées dans  $N$ .

Quitte à permuter les lignes, tout  $x$  se décompose en  $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$  où  $x_B$  est formé des composantes de  $x$  indexées dans  $B$  et  $x_N$  est formé des composantes de  $x$  indexées dans  $N$ . Ainsi  $Ax=b \Leftrightarrow (A_B \ A_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = A_B x_B + A_N x_N = b$  et si  $A_B$  est inversible alors on peut exprimer  $x_B$  en fonction de  $x_N$  par la relation  $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$ .

Exemple: soit le système  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$

Ici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Choisissons  $B = \{1, 3\}, N = \{2, 4\}$ . Alors  $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$(A_B \ A_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 - x_4 \\ 3x_2 + 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_2 + 5x_4 \end{pmatrix}$

On fera l'hypothèse de non-dégénérescence à savoir  $\forall B$  t.q.  $A_B$  inversible,  $A_B^{-1}b > 0$ .

Comme pour la programmation linéaire, il est plus commode d'utiliser la transposée du gradient de  $f$  (vecteur ligne) que le gradient de  $f$  (vecteur colonne). On note  $\frac{\partial f}{\partial x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \nabla f^t$  (on

aura reconnu la matrice jacobienne de  $f$ ). De manière similaire aux notations précédentes on note

$$\frac{\partial f}{\partial x_N} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{j_{n-m}}} \right) \quad j_k \in N \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_B} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_m}} \right) \quad i_k \in B.$$

$f$  peut s'exprimer en fonction de  $x_N$  uniquement:

$$f(x_B, x_N) = f(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N, x_N) = \bar{f}(x_N). \quad \text{Le gradient de } \bar{f} \text{ est appelé gradient réduit de } f$$

$$\text{et sa transposée s'exprime par } \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_N} = -\frac{\partial f}{\partial x_B} A_B^{-1} A_N + \frac{\partial f}{\partial x_N}.$$

Exemple (suite): soit  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2$ . On exprime  $x_1$  en fonction de  $x_2, x_4$ , on obtient

$$\bar{f}(x_2, x_4) = (-5x_2 - 17x_4)^2 + x_2^2 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_4} \right) = (52x_2 + 170x_4 \quad 170x_2 + 578x_4).$$

On pourra vérifier ce résultat avec la formule matricielle donnée ci-dessus.

### 3.2. principe de la méthode

Plutôt que de considérer  $f$ , fonction de  $n$  variables, on considère  $\bar{f}$  fonction de  $n-m$  variables. Outre le fait que le nombre de variables est ainsi moins important, l'intérêt est que ces  $n-m$  variables sont soumises seulement aux contraintes relativement simples de non négativité.

On part d'un point  $x$  réalisable et on choisit une partition des variables  $(B, N)$  vérifiant les critères énoncés plus haut.

On va effectuer un déplacement dans la direction opposée au gradient réduit mais en prenant soin de ne pas rendre négatives les variables indexées dans  $N$  et nulles. Notons

$$r = -\frac{\partial f}{\partial x_B}(x) A_B^{-1} A_N + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) \quad \text{la transposée du gradient réduit pris au point } x.$$

On définit la direction  $d$ , se décomposant en  $d_B$  et  $d_N$ , de la manière suivante:

$$- \quad d_j = \begin{cases} 0 & \text{si } r_j > 0 \text{ et } x_j = 0 \\ -r_j & \text{sinon} \end{cases} \quad (j \in N)$$

$$- \quad d_N \text{ étant défini, } d_B \text{ est déterminé via les contraintes d'égalité par } d_B = -A_B^{-1} A_N d_N$$

Si  $d_N \neq 0$  le déplacement se fait jusqu'à atteindre le minimum de  $f$  dans la direction  $d$  mais en respectant les contraintes de non négativité des variables. On obtient un nouveau point  $x'$ . Si une de ses composantes dans  $B$ , disons  $s$ , s'annule on construit une nouvelle partition des variables  $B' = B - \{s\} + \{r\}$   $N' = N + \{s\} - \{r\}$  où  $r$  est choisi de sorte que  $A_{B'}$  soit inversible et que  $x'_r$  soit non nul puis on réitère. Cette opération, appelée changement de base, est nécessaire car sinon on risque de faire du surplace, la nullité de  $x'_s$  bloquant le déplacement suivant. Le fait de faire passer  $s$  dans  $N$  permet de contrôler la variation de la coordonnée  $s$  qui ne peut être que positive ou nulle par construction de la direction de déplacement.

Si  $d_N = 0$  les conditions de Kuhn-Tucker sont satisfaites et on arrête.

#### Théorème

Si la méthode de gradient réduit construit une direction de déplacement nulle, i.e.  $d_N = 0$ , le point courant  $x$  vérifie les conditions de Kuhn-Tucker.

démonstration:

$$\text{Les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \mu A - \lambda = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda_i x_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Soient  $\mu = -\frac{\partial f}{\partial x_B}(x) A_B^{-1}$ ,  $\lambda_B = 0$ ,  $\lambda_N = r = -\frac{\partial f}{\partial x_B}(x) A_B^{-1} A_N + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)$ .  $x, \mu, \lambda$  vérifient-ils ces conditions? Pour la première égalité un simple calcul le montre. La deuxième condition ( $\lambda \geq 0$ )

est vérifiée car  $d_N = 0 \Rightarrow r \geq 0$  d'après la définition de  $d_N$ . La troisième condition (complémentarité) est vérifiée car  $d_j = 0 \Rightarrow (r_j > 0 \text{ et } x_j = 0) \text{ ou } (-r_j = 0) \forall j \in N$  toujours par définition de  $d_N$ . □

### 3.3. algorithme

Soit  $x$  un point réalisable et une partition des variables  $(B, N)$  t.q.  $A_B$  inversible

1) déterminer  $r = -\frac{\partial f}{\partial x_B}(x)A_B^{-1}A_N + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)$

$$d_j = \begin{cases} 0 & \text{si } r_j > 0 \text{ et } x_j = 0 \\ -r_j & \text{sinon} \end{cases} \quad (j \in N), \quad d_B = -A_B^{-1}A_N d_N$$

Si  $d_N \neq 0$  alors

$$\alpha_1 = \max\{\alpha \geq 0: x + \alpha d \geq 0\}$$

soit  $\alpha_2$  solution de minimiser  $f(x + \alpha d)$  sous la contrainte  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$

$$x \leftarrow x + \alpha_2 d$$

si  $\exists s \in B \ x_s = 0$  alors on change de base:

soit  $r \in N$  t.q.  $A_{B'}$  inversible ( $B' = B - \{s\} + \{r\}$ ) et  $x_r$  maximum

$$B \leftarrow B - \{s\} + \{r\}$$

$$N \leftarrow N + \{s\} - \{r\}$$

aller en 1)

sinon FIN.

Remarque pratique:

au cours de l'algorithme, il faut effectuer le changement de base  $B' = B - \{s\} + \{r\}$   $N' = N + \{s\} - \{r\}$  et il faut alors calculer  $A_{B'}^{-1}$ . Ce calcul peut être fait à moindre coût.

On a l'identité  $A_{B'}^{-1} = (A_B^{-1}A_{B'})^{-1}A_B^{-1}$

$A_{B'}$  étant obtenue à partir de  $A_B$  en remplaçant la colonne  $A_{\{s\}}$  par la colonne  $A_{\{r\}}$ , on a

$$A_B^{-1}A_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & p & \ddots \\ 0 & & y_m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A_B^{-1}A_{\{r\}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ p \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\text{si } p \neq 0 \text{ alors } (A_B^{-1}A_{B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-y_1}{p} & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \frac{1}{p} & \ddots \\ 0 & & \frac{-y_m}{p} & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc calculer  $A_{B'}^{-1}$  en prémultipliant  $A_B^{-1}$  par une matrice simple à obtenir.  $p$  est appelé pivot de la colonne  $r$ .

Exemple: reconsidérons le système  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Choisissons  $B = \{1, 3\}, N = \{2, 4\}$ . Alors  $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Effectuons le changement de base  $B' = \{2, 3\}, N' = \{1, 4\}$

$A_B^{-1}A_{\{2\}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$   $p=5 \neq 0$  et donc  $A_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  est inversible  $(A_B^{-1}A_{B'})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$  et

$$A_{B'}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'opération changement de base est toujours possible. En effet  $x_B + A_B^{-1}A_N x_N = A_B^{-1}b > 0$  et si on note  $p_j$  le pivot de la colonne  $j$  (relatif à  $x_s$ ) on a :  $s \in B$  t. q.  $x_s = 0 \Rightarrow \sum_{j \in N} p_j x_j > 0 \Rightarrow \exists r \in N$  t. q.  $p_r x_r \neq 0$ .

Exemple (suite): pour  $B = \{1, 3\}$ , on a  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + A_{\{1,3\}}^{-1}A_{\{2,4\}} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = A_{\{1,3\}}^{-1}b$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit encore } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow -x_2 - 6x_4 = 2$$

Les pivots des colonnes  $A_2$  et  $A_4$  (relatifs à  $x_3$ ) sont -1 et -6. S'ils étaient nuls on aurait  $0=2$ . On voit que la condition de non-dégénérescence n'est pas nécessaire puisqu'ici  $A_B^{-1}b$  a une composante (celle associée à  $x_1$ ) nulle et pourtant on peut effectuer les changements de base  $B - \{1\} + \{2\}$  et  $B - \{1\} + \{4\}$ , les pivots (5 et 17) étant non nuls.

Exemple récapitulatif: soit (P) minimiser  $x_1^2 + x_2^2$  sous les contraintes  $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

(P) revient à minimiser  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$  sous les contraintes  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Choisissons le point initial  $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \{3\}$ ,  $N = \{1, 2\}$ .

Itération 1.

On a  $x_3 = -1 + x_1 + x_2$ . On en déduit  $\bar{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, -1 + x_1 + x_2)$ ,

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_N} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2x_1 \quad 2x_2)$  et  $r = (4 \quad 0)$ . La direction de déplacement est  $d = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \alpha \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$$

Le minimum de  $f(2 - 4\alpha, 0, 1 - 4\alpha)$  sous la contrainte  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$  est atteint en  $\alpha_2 = \frac{1}{4}$

Le nouveau point est  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Sa coordonnée 3 est nulle. Il faut effectuer un changement de base. L'indice 1 est l'indice dans  $N$  associé à la coordonnée de  $P_1$  la plus grande: on forme la nouvelle décomposition  $B = \{1\}$  et  $N = \{2, 3\}$ .

Itération 2.

On a  $x_1 = 1 - x_2 + x_3$  d'où  $\bar{f}(x_2, x_3) = f(1 - x_2 + x_3, x_2, x_3)$ ,  
 $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_N} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (-2x_1 + 2x_2 \quad 2x_1)$  et  $r = (-2 \quad 2)$ .  $d_N = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $d_B = -2$  donc la  
direction de déplacement est  $d = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}$

Le minimum de  $f(1 - 2\alpha, 2\alpha, 0)$  sous la contrainte  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$  est atteint en  $\alpha_2 = \frac{1}{4}$

Le nouveau point est  $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Itération 3.

Le gradient réduit en  $P_2$  est  $r = (0 \quad 1)$  et donc  $d_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On arrête.

Vérifions que les conditions de Kuhn-Tucker sont satisfaites:

ici  $A = (1 \quad 1 \quad -1)$

soient  $\mu = -\frac{\partial f}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) A_1^{-1} = -2 \times \frac{1}{2} = -1$  (car  $A_1 = 1$ ),  $\lambda_1 = 0$ ,  $(\lambda_2 \quad \lambda_3) = r = (0 \quad 1)$

$\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) + \mu A - \lambda = 0 \Leftrightarrow \left( 2 \times \frac{1}{2} \quad 2 \times \frac{1}{2} \quad 0 \right) - (1 \quad 1 \quad -1) - (0 \quad 0 \quad 1) = (0 \quad 0 \quad 0)$ , donc vérifié.

On aura remarqué que l'on a une écriture "transposée" des équations de Kuhn-Tucker.

$\lambda \geq 0$  et les conditions de complémentarité  $\lambda_1 \times \frac{1}{2} = 0$ ,  $\lambda_2 \times \frac{1}{2} = 0$ ,  $\lambda_3 \times 0 = 0$  sont vérifiées.

Remarque: en partant du même point on obtient des cheminements différents selon le choix du  $B$  initial. Par exemple si l'on choisit  $B = \{1\}$  et  $N = \{2, 3\}$ , on passe par les 3 points

$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  sans changer de base  $B$ .

## Méthodes de pénalité et de barrière

### 1. Introduction

Le principe de ces méthodes est de transformer le problème initial en un problème sans contraintes dont la résolution est a priori plus facile surtout dans le cas de contraintes non linéaires.

### 2. Méthode de pénalité

#### 2.1. Introduction

La méthode de pénalité est une méthode duale dans le sens où elle atteint la solution du problème par l'extérieur de l'ensemble des solutions réalisables. Dès que l'on atteint une solution réalisable celle-ci se trouve être une solution optimale. Cette méthode consiste à résoudre une suite de problèmes sans contraintes. L'inconvénient inhérent aux méthodes duales est que si l'on arrête l'algorithme avant terme on ne dispose pas d'une solution réalisable.

#### 2.2. Principe de la méthode

On considère le problème  $(P)$ : minimiser  $f(x)$   $x \in S \subset R^n$

A partir de  $(P)$  on construit le problème sans contraintes  $(P_\mu)$ : minimiser  $f(x) + \mu P(x)$   $x \in R^n$

où  $\mu \in R^+$  et  $P: R^n \rightarrow R$  vérifie

$$\begin{cases} 1) P \text{ continue} \\ 2) P(x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n \\ 3) P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S \end{cases}$$

$P(x)$  est une pénalité infligée à tout  $x$  qui n'est pas solution réalisable de  $(P)$ .

exemple: pénalité de Courant-Beltrami

Si  $S = \{x: g_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, m \quad h_i(x) = 0 \quad i=1, \dots, p\}$  on peut prendre la pénalité

$$P(x) = \sum_{i=1}^m (g_i^+(x))^2 + \sum_{i=1}^p (h_i(x))^2 \quad \text{où } g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$$

Intuitivement pour  $\mu$  "grand", toute solution (optimale) de  $(P_\mu)$  a une pénalité nulle c'est-à-dire est réalisable pour  $(P)$ . Mais on ne sait pas a priori quelle valeur assigner à  $\mu$ . C'est pourquoi, pour chercher cette valeur, on se donne une suite  $(\mu_k)$  (positif) strictement croissante et qui tend vers l'infini (par exemple  $k$ ).

La démarche des méthodes de pénalité est alors la suivante:

- pour chaque  $k$  on résout le problème sans contraintes  $(P_k)$ :  $f(x) + \mu_k P(x)$   $x \in R^n$
- on obtient  $(x_k)$  la suite des solutions des  $(P_k)$ .

Question: la suite  $(x_k)$  converge-t-elle vers une solution de  $(P)$  ?

#### 2.3. Convergence de la méthode

On se donne une suite  $(\mu_k)$  telle que  $\mu_{k+1} > \mu_k > 0$  et qui tend vers l'infini.



On note:

-  $q(x, \mu_k) = f(x) + \mu_k P(x)$

-  $x_k$  la solution de  $(P_k)$ : minimiser  $q(x, \mu_k) = f(x) + \mu_k P(x)$   $x \in R^n$

Hypothèse:  $\forall k$   $(P_k)$  admet une solution  $x_k$ .

Lemme1

$$q(x_k, \mu_k) \leq q(x_{k+1}, \mu_{k+1})$$

$$P(x_k) \geq P(x_{k+1})$$

$$f(x_k) \leq f(x_{k+1})$$

Lemme2

Soit  $x^*$  une solution de  $(P)$ .  $f(x^*) \geq q(x_k, \mu_k) \geq f(x_k) \quad \forall k$

Théorème

Si  $f$  continue alors toute sous-suite convergente  $(x_{k_p})$  converge vers une solution de  $(P)$ .

démonstration

Soit  $\bar{x}$  la limite de  $(x_{k_p})$ , soit  $x^*$  une solution de  $(P)$ .

Les lemmes 1 et 2 impliquent:

$$f(x_{k_0}) + \mu_{k_p} P(x_{k_p}) \leq f(x_{k_p}) + \mu_{k_p} P(x_{k_p}) = q(x_{k_p}, \mu_{k_p}) \leq f(x^*) \quad (k_0 < k_p)$$

$$0 \leq P(x_{k_p}) \leq \frac{f(x^*) - f(x_{k_0})}{\mu_{k_p}} \text{ donc } P(x_{k_p}) \xrightarrow{p} 0 \text{ et par continuité de } P \quad P(\bar{x}) = 0$$

$\bar{x}$  est donc une solution réalisable de  $(P)$ .

$$f(x_{k_p}) \leq f(x^*) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(x^*) \quad \bar{x} \text{ est donc une solution (optimale) de } (P).$$

□

Le théorème précédent répond donc, dans une large mesure, affirmativement à notre question initiale qui posait en fait le problème de la validité de la méthode des pénalités. Le théorème suivant montre l'existence de sous-suites convergentes.

Théorème

Si  $f$  coercive alors  $\forall k$   $(P_k)$  admet une solution  $x_k$ , de plus si  $(P)$  admet une solution alors la suite  $(x_k)$  est bornée et donc contient une sous suite convergente.

démonstration

$q(x, \mu_k) = f(x) + \mu_k P(x) \geq f(x)$  car  $\mu_k P(x) \geq 0$ .  $q(x, \mu_k)$  est donc coercive et  $(P_k)$  admet une solution  $x_k$ . Soit  $x^*$  une solution de  $(P)$ ,  $f(x_k) \leq f(x^*)$  ce qui implique par coercivité de  $f$  que  $\|x_k\| < \infty$

□

## 2.4. Approximation des multiplicateurs de Lagrange

Soit  $S = \{x: g_i(x) \leq 0 \ i = 1, \dots, m \ h_i(x) = 0 \ i = 1, \dots, p\}$

On considère la pénalité:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m (g_i^+(x))^2 + \sum_{i=1}^p (h_i(x))^2 \text{ où } g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\}$$

Lemme: Si  $g_i$  est de classe  $C^1$  alors  $(g_i^+(x))^2$  est de classe  $C^1$  et son gradient est donné par  $\nabla g_i^{+2}(x) = 2g_i^+(x)\nabla g_i(x)$ .

L'intérêt de ce résultat est que  $q(x, \mu_k)$  est de classe  $C^1$  et que l'on peut utiliser les résultats usuels pour chercher son minimum (point critique etc...).

**Théorème**

Si  $x^*$  solution de (P) vérifie le critère de qualification de l'indépendance linéaire

Si  $f$  et  $g, h$  sont  $C^1$

Si  $x_k \xrightarrow{k} x^*$

alors  $2\mu_k g_i^+(x_k) \xrightarrow{k} \lambda_i$  et  $2\mu_k h_i(x_k) \xrightarrow{k} \alpha_i$  les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux  $g_i \ (i = 1, \dots, m), h_i \ (i = 1, \dots, p)$ .

**démonstration**

-  $x^*$  solution de (P) vérifie les conditions de Kuhn-Tucker:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \nabla h_i(x^*) = 0 \text{ avec } \lambda_i \geq 0$$

L'indépendance linéaire des  $\nabla g_i(x^*) \ i \in I(x^*), \nabla h_i(x^*) \ i = 1, \dots, p$  assure l'unicité des  $\lambda_i \ i \in I(x^*), \alpha_i \ i = 1, \dots, p$

-  $x_k$  solution de  $(P_k)$  est un point critique de  $f(x) + \mu_k \sum_{i=1}^m (g_i^+(x))^2 + \mu_k \sum_{i=1}^p (h_i(x))^2$  donc:

$$\nabla f(x_k) + \mu_k \sum_{i=1}^m 2g_i^+(x_k) \nabla g_i(x_k) + \mu_k \sum_{i=1}^p 2h_i(x_k) \nabla h_i(x_k) = 0$$

- il existe  $K$  tel que  $\forall i \notin I(x^*) \ k > K \Rightarrow g_i^+(x_k) = 0$  (car  $g_i(x^*) < 0$  et  $x_k \xrightarrow{k} x^*$ )

$$k > K \quad \nabla f(x_k) + \mu_k \sum_{i \in I(x^*)} 2g_i^+(x_k) \nabla g_i(x_k) + \mu_k \sum_{i=1}^p 2h_i(x_k) \nabla h_i(x_k) = 0$$

Passage à la limite et unicité des solutions permettent de conclure. □

Exemple: soit (P) minimiser  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sous les contraintes  $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

On met les contraintes sous la forme 
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0 \\ g_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Résolvons ce problème à l'aide des pénalités de Courant-Beltrami.

On pose: 
$$\begin{cases} g_1^+(x_1, x_2) = \max\{0, -x_1 - x_2 + 1\} \\ g_2^+(x_1, x_2) = \max\{0, -x_1\} \\ g_3^+(x_1, x_2) = \max\{0, -x_2\} \end{cases}$$

La pénalité est:  $P(x_1, x_2) = (g_1^+(x_1, x_2))^2 + (g_2^+(x_1, x_2))^2 + (g_3^+(x_1, x_2))^2$

En prenant  $\mu_k = k$ , on doit résoudre la suite de problèmes  $(P_k)$ : minimiser  $f(x_1, x_2) + kP(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$f(x_1, x_2) + kP(x_1, x_2)$  est convexe, il suffit de déterminer ses points critiques c'est-à-dire résoudre l'équation:

$$\nabla f(x_1, x_2) + k \nabla P(x_1, x_2) = \nabla f(x_1, x_2) + k \sum_{i=1}^3 2g_i^+(x_1, x_2) \nabla g_i(x_1, x_2) = 0$$

1er cas:  $-x_1 - x_2 + 1 > 0$ ,  $-x_1 > 0$ ,  $-x_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + k(-2(-x_1 - x_2 + 1) - 2(-x_1)) = 0 \\ 2x_2 + k(-2(-x_1 - x_2 + 1) - 2(-x_2)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + k(2x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ x_2 + k(x_1 + 2x_2 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+2k)x_1 + kx_2 = k \\ (1+2k)x_2 + kx_1 = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{k}{1+3k} > 0 \text{ donc impossible.}$$

2è cas:  $-x_1 - x_2 + 1 > 0$ ,  $-x_1 \leq 0$ ,  $-x_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + k(-2(-x_1 - x_2 + 1)) = 0 \\ 2x_2 + k(-2(-x_1 - x_2 + 1) - 2(-x_2)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + k(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ x_2 + k(x_1 + 2x_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+k)x_1 + kx_2 = k \\ (1+2k)x_2 + kx_1 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k(k+1)}{(k+1)^2 + k} \\ x_2 = \frac{k}{(k+1)^2 + k} > 0 \end{cases} \text{ donc impossible.}$$

3è cas:  $-x_1 - x_2 + 1 > 0$ ,  $-x_1 > 0$ ,  $-x_2 \leq 0$

Ce cas est symétrique au cas précédent (permuter  $x_1$  et  $x_2$ ) donc impossible.

4è cas:  $-x_1 - x_2 + 1 > 0$ ,  $-x_1 \leq 0$ ,  $-x_2 \leq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + k(-2(-x_1 - x_2 + 1)) = 0 \\ 2x_2 + k(-2(-x_1 - x_2 + 1)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + k(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ x_2 + k(x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+k)x_1 + kx_2 = k \\ (1+k)x_2 + kx_1 = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{k}{1+2k}$$

On a trouvé une solution à  $(P_k)$ . C'est sans doute la seule car  $f(x_1, x_2) + kP(x_1, x_2)$  est strictement convexe. Vérifions-le.

5<sup>è</sup> cas:  $-x_1 - x_2 + 1 \leq 0, -x_1 > 0, -x_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + k(-2(-x_1)) = 0 \\ 2x_2 + k(-2(-x_2)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+k)x_1 = 0 \\ (1+k)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ donc impossible.}$$

6<sup>è</sup> cas:  $-x_1 - x_2 + 1 \leq 0, -x_1 \leq 0, -x_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 + k(-2(-x_2)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ (1+k)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ donc impossible.}$$

7<sup>è</sup> cas:  $-x_1 - x_2 + 1 \leq 0, -x_1 > 0, -x_2 \leq 0$

Ce cas est symétrique au cas précédent (permuter  $x_1$  et  $x_2$ ) donc impossible.

8<sup>è</sup> cas:  $-x_1 - x_2 + 1 \leq 0, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \text{ donc impossible.}$$

La suite des  $x_k = \begin{pmatrix} \frac{k}{1+2k} \\ \frac{k}{1+2k} \end{pmatrix}$  est convergente. D'après théorème, elle converge vers la solution de

$$(P): x_k = \begin{pmatrix} \frac{k}{1+2k} \\ \frac{k}{1+2k} \end{pmatrix} \xrightarrow{k} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La solution de (P) vérifie le critère de qualification de l'indépendance linéaire, les fonctions sont  $C^1$  donc les limites suivantes nous donnent les multiplicateurs de Lagrange de (P):

$$\begin{cases} 2kg_1^+(x_k) = 2k\left(-\frac{2k}{1+2k} + 1\right) = \frac{2k}{1+2k} \xrightarrow{k} 1 \\ 2kg_2^+(x_k) = 0 \\ 2kg_3^+(x_k) = 0 \end{cases}$$

### 3. Méthode de barrière

#### 3.1. Introduction

La méthode de barrière est une méthode primale dans le sens où les déplacements se font à l'intérieur de l'ensemble des solutions réalisables, une fonction barrière empêchant d'en sortir. On résout une suite de problèmes qui par la présence de la barrière sont en pratique sans contraintes.

#### 3.2. Principe de la méthode

On considère le problème (P): minimiser  $f(x)$   $x \in S \subset R^n$

tel que l'intérieur de  $S$  est non vide et pour tout  $x^*$  solution de (P) tout voisinage  $V(x^*)$  de  $x^*$  rencontre l'intérieur de  $S$ .  $S$  est dit robuste. Cela signifie que l'on peut atteindre  $x^*$  par l'intérieur de  $S$ .

$B$  une fonction barrière est une fonction définie sur l'intérieur de  $S$  et

$$\text{t.q.} \begin{cases} (1) B(x) \text{ continue} \\ (2) B(x) \geq 0 \\ (3) B(x) \rightarrow +\infty \text{ ssi } x \text{ s'approche de la frontière de } S \end{cases}$$

Exemple:  $S = \{x: g_i(x) \leq 0 \ i=1, \dots, m\}$  où les  $g_i$  sont continues et t.q.  $\overset{\circ}{S} = \{x: g_i(x) < 0 \ i=1, \dots, m\}$  ( $\overset{\circ}{S}$  est l'intérieur de  $S$ ). Sous ces hypothèses la frontière de  $S$  est l'ensemble  $\{x \in S: \exists i \text{ t.q. } g_i(x) = 0\}$ .

Alors on peut prendre comme barrière:

$$B(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}, \quad B(x) = -\sum_{i=1}^m \text{Log}(-g_i(x)) \text{ avec } -1 \leq g_i(x)$$

On considère le problème: minimiser  $f(x) + \frac{1}{c} B(x)$   $x \in \overset{\circ}{S}$  où  $c > 0$  ( $\overset{\circ}{S}$  est l'intérieur de  $S$ )

Ce problème peut être résolu par des méthodes d'optimisation sans contraintes, les propriétés 1 et 3 de la barrière  $B$  empêchant de sortir de  $S$ .

Cependant pour que ce problème soit équivalent à  $(P)$ , il faut  $c$  grand pour que  $\frac{1}{c} B(x)$  soit négligeable et ainsi minimiser  $f(x)$  sans écarter les éventuelles solutions de  $(P)$  situées sur la frontière de  $S$ . La valeur de  $c$  n'étant pas connue a priori, on se donne une suite  $(c_k)$  positive et strictement croissante qui tend vers l'infini (par exemple  $k$ ) et on résout la suite de problèmes  $(P_k)$  minimiser  $f(x) + \frac{1}{c_k} B(x)$   $x \in \overset{\circ}{S}$ . On obtient  $(x_k)$  la suite des solutions.

Question: cette suite converge-t-elle vers une solution de  $(P)$  ?

### 3.3. Convergence de la méthode

On montre que si  $f$  continue, toute sous-suite convergente de  $(x_k)$  converge vers une solution de  $(P)$ .

Exemple: soit  $(P)$  minimiser  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sous la contrainte  $x_1 + x_2 \geq 1$

On met la contrainte sous la forme  $g(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0$

Utilisons la barrière  $B(x_1, x_2) = -\text{Log}(x_1 + x_2 - 1)$

On résout la suite de problèmes  $(P_k)$ :

minimiser  $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{k}(-\text{Log}(x_1 + x_2 - 1))$  sous la contrainte  $x_1 + x_2 > 1$

Le domaine des solutions réalisables étant ouvert, le minimum est atteint nécessairement en un point critique. De plus la fonction étant convexe (comme somme de fonctions convexes), tout point critique est optimum global.

On a donc à résoudre: (1) 
$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{k} \left( \frac{-1}{x_1 + x_2 - 1} \right) = 0 \\ 2x_2 + \frac{1}{k} \left( \frac{-1}{x_1 + x_2 - 1} \right) = 0 \end{cases}$$

On en déduit le système 
$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1 + \frac{1}{k} \left( \frac{-1}{2x_1 - 1} \right) = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est du second degré et finalement on trouve 2 solutions au système:

$x_1 = x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{k}}}{4}$ . Seule la solution  $x_1 = x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k}}}{4}$  vérifie la contrainte  $x_1 + x_2 > 1$ .

$\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k}}}{4} \xrightarrow{k} \frac{1}{2}$  donc la suite des solutions de  $(P_k)$  converge vers la solution de  $(P)$ .

Observant le système (1), on peut considérer  $\lambda_k = \frac{1}{k} \left( \frac{-1}{x_1 + x_2 - 1} \right)$  comme une approximation du multiplicateur de Lagrange de  $(P)$ . Remplaçant  $x_1, x_2$  on obtient  $\lambda_k = \frac{1}{k} \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{k}}}{2}} \xrightarrow{k} 1$

## Méthodes lagrangiennes

### 1. Introduction

Ces méthodes consistent en la résolution directe des conditions nécessaires d'optimalité du 1er ordre (conditions de Kuhn-Tucker). Ce sont des méthodes itératives qui partant d'un point initial opèrent par déplacements successifs dans l'espace défini par le produit cartésien des variables primales et des variables duales (multiplicateurs de Lagrange). Un bon point initial peut par exemple être obtenu par une méthode de pénalité arrêtée avant terme.

### 2. Problèmes avec contraintes d'égalité

#### 2.1. Fonction mérite

Soit le problème (P): minimiser  $f(x)$  sous la contrainte  $h(x) = 0$

où  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$ ,  $x \in R^n$ .

Les conditions nécessaires d'optimalité du 1er ordre sont: 
$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla h_i(x) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

En utilisant la fonction de Lagrange  $L(x, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i h_i(x)$ , ces conditions s'écrivent:

$$\begin{cases} \nabla L(x, \mu) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

On définit la fonction de mérite par  $m(x, \mu) = \frac{1}{2} \|\nabla L(x, \mu)\|^2 + \frac{1}{2} \|h(x)\|^2$

On voit que si on trouve un minimum global de la fonction de mérite on a résolu les conditions d'optimalité du 1er ordre du problème (P).

**Proposition**

Soit 2 matrices  $A n \times n$ ,  $B n \times m$ ,  $m \leq n$ ,  $B$  de rang  $m$  (donc  $m$  colonnes linéairement indépendantes) et  $A$  définie positive sur  $\{y: B^t y = 0\}$  alors  $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}$  est inversible.

**Notations**

$\nabla h(x) = (\nabla h_1(x) \cdots \nabla h_p(x))$  matrice  $n$  lignes dont les  $p$  colonnes sont les gradients des  $h_i$

( $\nabla h(x)^t$  n'est autre que la classique matrice jacobienne de  $h(x)$ ).

$\nabla_x m$  le gradient de  $m$  par rapport aux variables  $x$ .

$\nabla_\mu m$  le gradient de  $m$  par rapport aux variables  $\mu$ .

$$F(x) = \{y: \nabla h_i(x) \bullet y = 0 \quad i = 1, \dots, p\} = \{y: \nabla h(x)^t y = 0\}.$$

**Lemme 1**

Le gradient de la fonction de mérite vaut 
$$\begin{pmatrix} \nabla_x m \\ \nabla_\mu m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x, \mu) + \nabla h(x) h(x) \\ \nabla h(x)^t \nabla_x L(x, \mu) \end{pmatrix}$$

Lemme2

Soit  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$  où  $d_1, d_2$  sont 2 vecteurs colonnes de dimensions respectives  $n$  et  $p$ . La dérivée de la fonction de mérite dans la direction  $d$  est  $(\nabla m^t \nabla_\mu m^t) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \nabla L(x, \mu)^t HL(x, \mu) d_1 + h(x)^t \nabla h(x)^t d_1 + \nabla L(x, \mu)^t \nabla h(x) d_2$

Le théorème suivant montre que sous les conditions habituelles de qualification de l'indépendance linéaire et les conditions suffisantes d'optimalité du 2ème ordre, un minimum local de la fonction de mérite est un minimum global de la fonction de mérite.

Théorème

Si  $HL(x, \mu)$  le hessien de la fonction de Lagrange est défini positif sur  $F(x)$  et si les  $\nabla h_i(x)$  sont linéairement indépendants alors  $(x, \mu)$  minimum local de  $m(x, \mu)$  est minimum global de  $m(x, \mu)$ .

démonstration

$(x, \mu)$  minimum local (sans contraintes) est donc point critique de la fonction de mérite:

$$\begin{pmatrix} \nabla m \\ \nabla_\mu m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HL(x, \mu) \nabla L(x, \mu) + \nabla h(x) h(x) \\ \nabla h(x)^t \nabla L(x, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} HL(x, \mu) & \nabla h(x) \\ \nabla h(x)^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla L(x, \mu) \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après la proposition et sous les hypothèses du théorème, ce système a une solution unique

$$\begin{pmatrix} \nabla L(x, \mu) \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La fonction de mérite est nulle et donc atteint son minimum global en  $(x, \mu)$ .

□

## 2.2. Méthode du 1er ordre

Cette méthode n'utilise que les dérivées premières des fonctions.

En partant d'un point initial  $\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ \mu^{(0)} \end{pmatrix}$  quelconque, on construit la suite définie par:

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ \mu^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{pmatrix} + \alpha^{(k)} d^{(k)} \quad \text{où } \alpha^{(k)} \text{ minimise } m \left( \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{pmatrix} + \alpha d^{(k)} \right) \text{ dans la direction}$$

$$d^{(k)} = \begin{pmatrix} -\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) \\ h(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

Théorème

Si  $HL(x^{(k)}, \mu^{(k)})$  le hessien de la fonction de Lagrange est défini positif au point courant alors la dérivée de la fonction de mérite au point courant dans la direction  $d^{(k)}$  est négative ou nulle et nulle ssi  $\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) = 0$ .

démonstration

La dérivée de  $m$  au point courant  $\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{pmatrix}$  dans la direction  $d^{(k)}$  est (cf. lemme 2)  
 $-\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)})^t HL(x^{(k)}, \mu^{(k)}) \nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)})$ .

□

$d^{(k)}$  est une direction de descente pour la fonction de mérite mais si  $\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) = 0$  alors la dérivée directionnelle est nulle et il se peut que le minimum dans la direction  $d^{(k)}$  soit atteint sans que  $h(x^{(k)})$  soit nul. Pour pallier à cette imperfection, on peut utiliser la fonction de mérite modifiée  $w_\gamma(x, \mu) = m(x, \mu) - \gamma L(x, \mu)$  avec le paramètre  $\gamma > 0$ .

**Théorème**

Si  $HL(x^{(k)}, \mu^{(k)}) - \gamma I$  est défini positif alors la dérivée de la fonction de mérite modifiée,  $w_\gamma = m - \gamma L$ , au point courant dans la direction  $d^{(k)}$  est négative ou nulle et nulle ssi  $\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) = 0$  et  $h(x^{(k)}) = 0$ .

démonstration

On a  $\nabla_\mu L = h$  et donc  $\begin{pmatrix} \nabla w_\gamma \\ \nabla_\mu w_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla m - \gamma \nabla L \\ \nabla_\mu m - \gamma h \end{pmatrix}$ . De manière similaire au lemme 2, la dérivée de  $w_\gamma = m - \gamma L$  au point courant  $\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{pmatrix}$  dans la direction  $d^{(k)}$  est égale à  $(\nabla w_\gamma^t \nabla_\mu w_\gamma^t) d^{(k)} = (\nabla m^t - \gamma \nabla L^t \nabla_\mu m^t - \gamma h^t) d^{(k)}$  soit  $-\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)})^t (HL(x^{(k)}, \mu^{(k)}) - \gamma I) \nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) - \gamma \|h(x^{(k)})\|^2$

□

### 2.3. Méthode de Newton

La méthode de Newton résout les conditions d'optimalité  $\begin{cases} \nabla L(x, \mu) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$  par approximations linéaires successives c'est-à-dire qu'à chaque itération on a le système linéaire suivant à résoudre:

$$\begin{cases} \nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) + HL(x^{(k)}, \mu^{(k)}) (x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \nabla h(x^{(k)}) (\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}) = 0 \\ h(x^{(k)}) + \nabla h(x^{(k)})^t (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0 \end{cases}$$

Noter que si  $h \equiv 0$  on retrouve la méthode de Newton des problèmes sans contraintes.

Ces formules peuvent se mettre sous la forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} HL(x^{(k)}, \mu^{(k)}) & \nabla h(x^{(k)}) \\ \nabla h(x^{(k)})^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k+1)} - x^{(k)} \\ \mu^{(k+1)} - \mu^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) \\ -h(x^{(k)}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{On pose } d^{(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k+1)} - x^{(k)} \\ \mu^{(k+1)} - \mu^{(k)} \end{pmatrix}$$



Remarque: si  $HL(x^{(k)}, \mu^{(k)})$  est défini positif sur  $F(x^{(k)})$  et si les  $\nabla h_i(x^{(k)})$  sont linéairement indépendants alors le système (1) admet une solution unique  $d^{(k)}$  (cf. proposition section 2.1).

**Théorème**

La dérivée de la fonction de mérite au point courant dans la direction  $d^{(k)}$  solution de (1) est négative ou nulle et nulle ssi  $\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) = 0$  et  $h(x^{(k)}) = 0$ .

démonstration

La dérivée de  $m$  au point courant  $\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{pmatrix}$  dans la direction  $d^{(k)}$  solution de (1) est (lemme2)

$$-\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)})^t \nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)}) - h(x^{(k)})^t h(x^{(k)}) = -\|\nabla L(x^{(k)}, \mu^{(k)})\|^2 - \|h(x^{(k)})\|^2$$

□

$d^{(k)}$  est une direction de descente pour la fonction de mérite et un minimum dans cette direction vérifie les conditions de Kuhn-Tucker du problème (P). Pour assurer la convergence de la méthode de Newton, on en déduit naturellement l'algorithme qui suit.

Partant d'un point initial quelconque, on construit la suite:

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ \mu^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \mu^{(k)} \end{pmatrix} + \alpha^{(k)} d^{(k)} \text{ où } \alpha^{(k)} \text{ minimise la fonction mérite dans la direction } d^{(k)} \text{ solution de (1)}$$

#### 2.4. Relation entre la méthode de Newton et les problèmes quadratiques

Le système (1) peut se réécrire:

$$\begin{pmatrix} HL(x^{(k)}, \mu^{(k)}) & \nabla h(x^{(k)}) \\ \nabla h(x^{(k)})^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k+1)} - x^{(k)} \\ \mu^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x^{(k)}) \\ -h(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

On constate que si l'on pose  $y = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ ,  $\mu = \mu^{(k+1)}$ , ces conditions sont les conditions d'optimalité du 1er ordre du problème quadratique suivant:

$$\text{minimiser } \frac{1}{2} y \bullet HL(x^{(k)}, \mu^{(k)}) y + \nabla f(x^{(k)}) \bullet y \text{ sous les contraintes } \nabla h(x^{(k)})^t y + h(x^{(k)}) = 0$$

Les contraintes de ce problème sont une approximation linéaire des contraintes du problème (P) initial.

### 3. Problèmes avec contraintes d'égalité et d'inégalité.

Soit le problème (P): minimiser  $f(x)$  sous les contraintes  $g(x) \leq 0$  et  $h(x) = 0$

$$\text{où } g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}, x \in R^n.$$

#### 3.1. Programmation quadratique réursive (Wilson)

La méthode de Wilson est basée sur la relation établie précédemment entre la méthode de Newton et les problèmes quadratiques et résout à chaque itération un programme quadratique sous contraintes linéaires.

On considère maintenant la fonction de Lagrange  $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda \bullet g(x) + \mu \bullet h(x)$  c'est-à-dire intégrant les contraintes d'inégalités.

La méthode est la suivante:

- soit  $(x^{(0)}, \lambda^{(0)}, \mu^{(0)})$  un point initial. Poser  $k=0$ .
- résoudre le problème  $P^{(k)}$ : minimiser  $\frac{1}{2}y \bullet HL(x^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)})y + \nabla f(x^{(k)}) \bullet y$  sous les contraintes
 
$$\begin{cases} \nabla g(x^{(k)})^t y + g(x^{(k)}) \leq 0 \\ \nabla h(x^{(k)})^t y + h(x^{(k)}) = 0 \end{cases}$$
- soit  $y^{(k)}$  une solution et  $\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$  les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux contraintes d'inégalité et d'égalité du problème  $P^{(k)}$ .
- poser
 
$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + y^{(k)} \\ \lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} \\ \mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} \end{cases}$$
- faire  $k \leftarrow k+1$  et réitérer.

Si à une itération  $k$   $y^{(k)} = 0$  alors  $x^{(k)}, \lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$  vérifient les conditions d'optimalité du 1er ordre du problème ( $P$ ).

### 3.2. méthode des contraintes actives

Le principe est de se ramener à chaque itération à un problème comportant uniquement des égalités (appelées contraintes actives) que l'on peut résoudre avec l'une des méthodes exposées dans le paragraphe précédent. On présente la méthode dans le cas de contraintes générales mais elle est de mise en oeuvre simple surtout dans le cas de contraintes linéaires.

On note  $I(x) = \{i: g_i(x) = 0\}$  l'ensemble des indices des contraintes d'inégalité saturées par  $x$ .

La méthode est la suivante.

On part de  $x^{(0)}$  réalisable.  $W^{(0)} = I(x^{(0)})$ ,  $k=0$ .

Minimiser  $f(x^{(k)} + d)$  sous les contraintes  $g_i(x^{(k)} + d) = 0$   $i \in W^{(k)}$ ,  $h(x^{(k)} + d) = 0$

Soit  $d^{(k)}$  une solution et  $\lambda$  les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes  $g$ .

Si  $d^{(k)} = 0$

si  $\lambda \geq 0$  alors FIN (les conditions de Kuhn-Tucker sont vérifiées)

sinon soit  $i \in W^{(k)}$   $\lambda_i < 0$ ,  $W^{(k+1)} = W^{(k)} - \{i\}$ ,  $k=k+1$  et réitérer.

Si  $d^{(k)} \neq 0$

déterminer  $\alpha$  maximum tel que  $\alpha \in [0,1]$  et  $x^{(k)} + \alpha d^{(k)}$  soit réalisable. Soit  $\alpha^{(k)}$  ainsi obtenu.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$$

$$W^{(k+1)} = I(x^{(k+1)})$$

$k=k+1$  et réitérer.

Dans le cas de contraintes linéaires (plus exactement affines)  $g_i(x) = a_i \bullet x - b_i$ ,  $h_i(x) = c_i \bullet x - d_i$ ,  $\alpha^{(k)}$  est simplement déterminé par les relations:

$$\begin{cases} \alpha \leq \frac{b_i - a_i \bullet x^{(k)}}{a_i \bullet d^{(k)}} \quad \forall i \text{ tel que } a_i \bullet d^{(k)} > 0 \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

La linéarité des contraintes  $h$  fait que le déplacement  $\alpha^{(k)} d^{(k)}$  est toujours possible puisque  $0 = h_i(x^{(k)} + d^{(k)}) = c_i \bullet (x^{(k)} + d^{(k)}) - d_i = c_i \bullet x^{(k)} - d_i + c_i \bullet d^{(k)} = c_i \bullet d^{(k)}$

Dans le cas de contraintes  $h$  non linéaires il se peut que le déplacement  $\alpha^{(k)} d^{(k)}$  ne respecte pas les contraintes  $h$  et il faut alors envisager des procédures plus complexes.

#### 4. Problèmes quadratiques

On considère le problème quadratique suivant:

$$\begin{aligned} &\text{minimiser} \quad c \bullet x + \frac{1}{2} x \bullet Hx \\ &\text{sous contraintes} \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $H$  est une matrice carré symétrique d'ordre  $n$ ,  $c$  vecteur de  $n$  lignes,  $A$  matrice  $m$  lignes  $n$  colonnes,  $b$  vecteur colonne de  $m$  lignes.

Les conditions de Kuhn et Tucker de ce problème ont une structure particulière. Elles se présentent sous la forme d'un système d'équations linéaires avec des contraintes de complémentarité appelé LCP de l'anglais linear complementary problem.

Il existe de nombreux algorithmes pour résoudre ce type de problème. La plupart reposent sur les concepts de variables de base et hors-base et se résolvent par des méthodes de pivot. Ici on présente la méthode du pivot de Lemke.

On introduit le vecteur  $y$  des  $m$  variables d'écart du système  $Ax \leq b$  de sorte que  $Ax + y = b$  avec  $y \geq 0$ . On note  $u$  le vecteur des  $m$  multiplicateurs de Lagrange des contraintes  $Ax \leq b$  et  $v$  le vecteur des  $n$  multiplicateurs des contraintes  $-x \leq 0$ .

Les conditions de Kuhn et Tucker du problème quadratique s'écrivent alors:

$$\begin{cases} Ax + y = b \\ -Hx - A^t u + v = c \\ x \bullet v = 0, u \bullet y = 0 \\ x, y, u, v \geq 0 \end{cases}$$

La première ligne spécifie que  $x$  est réalisable (i.e. vérifie les contraintes).

La deuxième ligne n'est autre que les conditions de Kuhn et Tucker liant les gradients de la fonction objectif et des contraintes  $Ax - b \leq 0$  et  $-x \leq 0$  par l'intermédiaire des multiplicateurs de Lagrange.

La troisième ligne est l'expression des conditions de complémentarité entre les contraintes et les multiplicateurs de Lagrange (le multiplicateur d'une contrainte non saturée est nul).

La quatrième ligne est là pour rappeler que les variables du problème doivent être positives ou nulles ainsi que les multiplicateurs (car ceux-ci sont associés à des contraintes d'inégalités).

$$\text{En posant } M = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^t & H \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}$$

les conditions de Kuhn et Tucker se mettent sous la forme

$$w - Mz = q, z \bullet w = 0, z \geq 0, w \geq 0$$

qui est la forme usuelle d'un LCP.

Noter que la positivité des variables permet l'écriture regroupée (sous la forme d'un produit scalaire) des conditions de complémentarité.

On note  $p=m+n$ . On a donc  $2p$  variables ( $z$  et  $w$ ) et  $p$  contraintes d'égalités. Les conditions de complémentarité entraînent que seulement la moitié des variables peuvent être non nulles soit  $p$  variables qui sont alors déterminées de façon unique par le système d'égalités qui est de rang  $p$ . On partitionne donc les variables en 2 ensembles de  $p$  variables: les variables hors base nulles et les variables de base déterminées par le système d'équations. Noter que les variables de base doivent être positives ou nulles, on dit alors que la base est réalisable.

#### 4.1. Résolution de LCP

Si  $q \geq 0$  alors  $w=q$  et  $z=0$  est une solution de LCP et celui-ci est alors résolu.

Supposons donc que  $q$  comporte au moins une composante négative.

On introduit alors une variable supplémentaire  $z_0 \geq 0$  dite variable artificielle que l'on ajoute à chacune des égalités du système:

$$w - Mz = q + z_0 \mathbf{1} \quad (\text{où } \mathbf{1} \text{ est le vecteur colonne formé de } p \text{ 1})$$

En posant  $z_0 = \max_{1 \leq j \leq p} (-q_j)$  et  $w=q + z_0 \mathbf{1}$  on obtient des variables  $w$  positives ou nulles. Mais par contre  $z_0 > 0$  et par conséquent LCP n'est pas résolu. Il faudrait pour cela annuler  $z_0$  en la faisant passer hors-base par exemple.

On dit que  $(w, z, z_0)$  est une solution de base presque complémentaire si  $z_0$  est en base, exactement une des variables  $w_j, z_j$  est en base pour  $j=1$  à  $p$  et  $j \neq s$ , où  $s$  est tel que les deux variables  $w_s, z_s$  sont hors base. Si les variables sont de plus positives ou nulles on dit que la base presque complémentaire est réalisable.

L'algorithme du pivot de Lemke que nous allons présenter, passe de base presque complémentaire réalisable en base presque complémentaire réalisable jusqu'à ce que  $z_0$  sorte de base. Le passage d'une base à l'autre se fait par une méthode de pivot classique qui permet de rentrer une variable en base alors qu'une autre en sort. Un tableau est associé à chaque base parcourue le long de l'algorithme.

#### Algorithme de Lemke

##### initialisation

Si  $q \geq 0$  STOP (LCP est résolu en posant  $w=q$  et  $z=0$ )

Initialiser le tableau avec la solution de base (non réalisable)  $w=q$  (en base),  $z=0$ ,  $z_0=0$  (hors base).

Déterminer l'indice  $s$  réalisant  $-q_s = \max_{1 \leq j \leq p} (-q_j)$ , pivoter à la ligne  $s$  et la colonne  $z_0$  ( $z_0$  entre en base et  $w_s$  en sort).

Poser  $y_s = z_0$

##### itérations

1. Soit  $d_s$  la colonne du tableau sous la variable  $y_s$ . Si  $d_s \leq 0$  aller en 2.

Déterminer l'indice  $r$  réalisant  $\min_{1 \leq j \leq p} \left\{ \frac{\bar{q}_j}{d_{j,s}} : d_{j,s} > 0 \right\}$  où  $\bar{q}$  est le membre droit du tableau.

Pivoter à la ligne  $r$  et la colonne  $y_s$  ( $y_s$  entre en base et la variable à la ligne  $r$  en sort).

Si la variable qui sort de base est  $z_0$ , aller en 3.

Si la variable qui sort de base est  $w_l$ , poser  $y_s = z_l$  et aller en 1.

Si la variable qui sort de base est  $z_l$ , poser  $y_s = w_l$  et aller en 1.

2. STOP On a détecté un rayon et LCP est non résolu (sauf si  $z_0=0$ )

3. STOP LCP est résolu

### Commentaires

- Lorsqu'on s'arrête par 3., la solution de LCP est obtenue en mettant les variables de base aux valeurs données dans le membre droit du tableau et les variables hors-base à zéro.

- Le vecteur directeur du rayon détecté en 2. est le vecteur construit de la façon suivante:

on met 1 pour la variable  $y_s$  (qui rentrait en base),  $-d_s$  pour les variables de base et 0 pour le reste des variables. Si l'on note  $\Delta$  le vecteur ainsi construit et  $(w^*, z^*, z_0^*)$  la solution de base obtenue au moment de la détection, on peut vérifier que les points  $(w^*, z^*, z_0^*) + \lambda \Delta$  sont de coordonnées positives ou nulles, vérifient  $w - Mz = q + z_0 \mathbf{1}$  et les conditions de complémentarité, ceci pour tout  $\lambda \geq 0$ .

- Pivoter est l'opération qui permet de passer d'une base à l'autre. Supposons que l'on soit à une itération quelconque de l'algorithme. Soit  $d_s$  la colonne du tableau sous la variable entrante  $y_s$  et  $r$  l'indice de la ligne de la variable sortante. Pour passer d'une base à l'autre il suffit de

prémultiplier le tableau courant par la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{d_{1s}}{d_{rs}} & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \\ & & \frac{1}{d_{rs}} & \\ & & \vdots & 1 \\ & & -\frac{d_{ps}}{d_{rs}} & \ddots \end{pmatrix}$ , matrice carrée

d'ordre  $p$  égale à l'identité à ceci près que la colonne  $r$  vaut  $-\frac{1}{d_{rs}} d_s$  sauf sur la ligne  $r$  où le coefficient vaut  $\frac{1}{d_{rs}}$ . L'élément  $d_{rs}$  qui joue un rôle central, est appelé pivot.

Au début de l'algorithme, le tableau est, à une permutation des colonnes près, la matrice  $(I, -M, -\mathbf{1}, q)$  représentant le système  $w - Mz - z_0 \mathbf{1} = q$  où  $I$  est la matrice identité d'ordre  $p$ . Si  $T$  est le tableau à une itération  $k$ ,  $PT$  sera le tableau à l'itération suivante  $k+1$ . On retrouve la même matrice  $P$  de passage d'une base à l'autre dans l'algorithme du gradient réduit (se référer à ce chapitre pour des explications complémentaires).

## 4.2. Traitement d'un exemple

Considérons le problème suivant:

$$\min x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ecrivons les conditions de Kuhn et Tucker:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + y_1 = -1 \\ -2x_1 + 3u_1 + v_1 = 1 \\ -2x_2 + u_1 + v_2 = -2 \\ u_1 y_1 = 0, v_1 x_1 = 0, v_2 x_2 = 0 \\ x_1, x_2, y_1, u_1, v_1, v_2 \geq 0 \end{cases}$$

On introduit la variable artificielle  $z_0$  sur chaque ligne et on recopie le système obtenu dans le tableau initial. On obtient:

base	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$u_1$	$v_1$	$v_2$	$z_0$	
$y_1$	-3	-1	1	0	0	0	-1	-1
$v_1$	-2	0	0	3	1	0	-1	1
$v_2$	0	-2	0	1	0	1	-1	-2

La base est non réalisable (le membre droit a des composantes négatives). On fait sortir  $v_2$  de la base (composante du membre droit la plus négative) et entrer  $z_0$ . On pivote. Expliquons en quoi cela consiste. Pivoter revient à exprimer les variables de la nouvelle base en fonction des (nouvelles) variables hors-base. Pour cela on divise la ligne correspondant à la variable qui sort ( $v_2$ ) par le pivot c'est-à-dire l'élément à l'intersection de cette ligne et de la colonne entrante ( $z_0$ ), ici -1 (le pivot est indiqué en gras). Après ceci on obtient un 1 dans la colonne entrante ( $z_0$ ) à l'intersection de la ligne sortante ( $v_2$ ). On modifie les autres lignes de façon à faire apparaître un zéro dans le reste de la colonne entrante ( $z_0$ ). Pour modifier une ligne on additionne cette ligne à la ligne sortante ( $v_2$ ) multipliée par le coefficient qui convient de façon à faire apparaître un zéro dans la colonne entrante ( $z_0$ ). Cette opération revient à prémultiplier le tableau par la matrice  $P$  explicitée dans le paragraphe précédent (voir commentaires). On obtient:

base	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$u_1$	$v_1$	$v_2$	$z_0$	
$y_1$	-3	<b>1</b>	1	-1	0	-1	0	1
$v_1$	-2	2	0	2	1	-1	0	3
$z_0$	0	2	0	-1	0	-1	1	2

$v_2$  est sortie de la base donc  $x_2$  doit rentrer. La variable de base qui doit lui laisser la place est celle qui réalise le minimum des ratios  $\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right\}$  obtenus en faisant les composantes du membre droit sur les composantes positives de la colonne sous  $x_2$ . Donc  $y_1$  qui réalise le min sort de base (ici on aurait pu prendre aussi bien  $z_0$ ). On pivote et on obtient:

base	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$u_1$	$v_1$	$v_2$	$z_0$	
$x_2$	-3	1	1	-1	0	-1	0	1
$v_1$	0	0	-2	4	1	1	0	1
$z_0$	2	0	-2	<b>1</b>	0	1	1	0

$y_1$  est sortie de la base donc  $u_1$  doit rentrer. La variable de base qui doit lui laisser la place est celle qui réalise le minimum des ratios  $\left\{\frac{1}{4}, \frac{0}{1}\right\}$  c'est-à-dire  $z_0$ . On pivote et on obtient:

base	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$u_1$	$v_1$	$v_2$	$z_0$	
$x_2$	-1	1	-1	0	0	0	1	1
$v_1$	-8	0	6	0	1	-3	-4	1
$u_1$	2	0	-2	1	0	1	1	0

$z_0$  est sortie, on s'arrête. La solution est  $x_2 = 1$   $v_1 = 1$   $u_1 = 0$  et le reste des variables est 0.

Considérons maintenant le problème suivant:

$$\begin{aligned} & \min x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 - 2x_2 \\ \text{s.c. } & \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ecrivons les conditions de Kuhn et Tucker:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + y_1 = -1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3u_1 + v_1 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + u_1 + v_2 = -2 \\ u_1y_1 = 0, v_1x_1 = 0, v_2x_2 = 0 \\ x_1, x_2, y_1, u_1, v_1, v_2 \geq 0 \end{cases}$$

On introduit la variable artificielle  $z_0$  sur chaque ligne et on recopie le système obtenu dans le tableau initial. On obtient:

base	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$u_1$	$v_1$	$v_2$	$z_0$	
$y_1$	-3	-1	1	0	0	0	-1	-1
$v_1$	-2	2	0	3	1	0	-1	1
$v_2$	2	-2	0	1	0	1	-1	-2

La base est non réalisable (le membre droit a des composantes négatives). On fait sortir  $v_2$  de la base (composante du membre droit la plus négative) et entrer  $z_0$ . On pivote et on obtient:

base	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$u_1$	$v_1$	$v_2$	$z_0$	
$y_1$	-5	1	1	-1	0	-1	0	1
$v_1$	-4	4	0	2	1	-1	0	3
$z_0$	-2	2	0	-1	0	-1	1	2

$v_2$  est sortie de la base donc  $x_2$  doit rentrer. La variable de base qui doit lui laisser la place est celle qui réalise le minimum des ratios  $\left\{\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{2}{2}\right\}$  obtenus en faisant les composantes du membre droit sur les composantes positives de la colonne sous  $x_2$ . Donc  $v_1$  qui réalise le min sort de base. On pivote et obtient:

base	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$u_1$	$v_1$	$v_2$	$z_0$	
$y_1$	-4	0	1	1/2	-1/4	-3/4	0	1/4
$x_2$	-1	1	0	1/2	1/4	-1/4	0	3/4
$z_0$	0	0	0	-2	-1/2	-1/2	1	1/2

$v_1$  est sortie de la base donc  $x_1$  doit rentrer. La colonne sous la variable  $x_1$  n'a aucune composante positive. On a détecté un rayon et on s'arrête. Comme  $z_0$  est non nul les conditions de Kuhn et Tucker ne sont pas résolues. Le rayon est l'ensemble des points de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \geq 0.$$

Montrons que le minimum du problème est non borné. Pour cela considérons la direction  $d$  obtenue en prenant les deux premières composantes du vecteur directeur du rayon (relatives à  $x_1, x_2$ ):  $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Etant donné un point réalisable (vérifiant les contraintes du problème) par

exemple  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ , les points de la forme  $\hat{x} + \lambda d$  avec  $\lambda \geq 0$  sont réalisables (car

$3d_1 + d_2 = 4 \geq 0$ ). Evaluons la fonction objectif pour  $\hat{x} + \lambda d$ . On obtient  $-\frac{35}{36} - \lambda$  soit une valeur qui décroît indéfiniment quand  $\lambda$  devient infiniment grand.

### 4.3. Propriétés de l'algorithme du pivot de Lemke

Sous l'hypothèse de non dégénérescence (i.e. toute variable en base n'est jamais nulle), l'algorithme de pivot de Lemke ne repasse jamais par le même point (la même solution de base presque complémentaire) et donc l'algorithme s'arrête en un nombre fini d'itérations.

Pour la résolution des conditions de Kuhn et Tucker, si l'algorithme se termine par une détection de rayon il n'est pas certain que cela signifie que les conditions de Kuhn-Tucker soient sans solutions. Cependant on peut prouver que l'algorithme se comporte bien au moins dans le cas d'un objectif convexe (mais aussi dans quelques autres cas). Mais l'expérience montre que lorsque ces conditions ne sont pas remplies l'algorithme se comporte la plupart du temps correctement. On a le théorème suivant.

#### Théorème

Sous l'hypothèse de non dégénérescence, si l'ensemble des solutions réalisables (les points vérifiant les contraintes  $Ax \leq b, x \geq 0$ ) est non vide et si  $H$  est semi-définie positive alors soit l'algorithme résout les conditions de Kuhn et Tucker et trouve donc un minimum (ici global car l'objectif est convexe), soit l'algorithme se termine par une détection de rayon et dans ce cas le problème n'admet pas de minimum (minimum non borné).



## Bibliographie

D. G. Luenberger. *Linear and nonlinear programming*. Addison Wesley (1989).

A.L Peressini, F.E. Sullivan, J.J. Uhl Jr.. *The mathematics of nonlinear programming*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer Verlag (1988).

M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, C.M. Shetty. *Nonlinear programming - Theory and algorithms*. (Second edition) Wiley-Interscience, Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons (1993).

M. Minoux. *Programmation mathématique I*. Dunod (1983).

H. Moulin, F. Fogelman-Soulié. *La convexité dans les mathématiques de la décision*. Hermann, collection méthodes.

J.C. Culioli. *Introduction à l'optimisation*. Ellipses (1994).

B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet. *Cours d'analyse IV -fonctions de plusieurs variables, systèmes différentiels*. Armand Colin. Collection U (1977).

A. Delachet. *La topologie*. Que sais-je? Presses Universitaires de France.