Fonctions coercives

Soit la fonction, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 \quad \text{avec } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Montrer que f est coercive à l'aide de la norme sup : $\|(x,y)\|_\infty = \sup(|x|,|y|)$

b) Trouver le ou les minima globaux de f

---

a) $(x-y)^2 \geqslant 0 \iff x^2+y^2 \geqslant 2xy \iff -2xy \geqslant -(x^2+y^2)$

on en déduit que $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 \geqslant x^4 + y^4 - 2(x^2+y^2)$

de plus $x^4+y^4 \geqslant [\sup(|x|,|y|)]^4$

$x^2+y^2 \leqslant [\sup(|x|,|y|)]^2 \times 2$

donc $f(x,y) \geqslant x^4+y^4-2(x^2+y^2) \geqslant \|(x,y)\|_\infty^4 - 4\|(x,y)\|_\infty^2$

donc quand $\|(x,y)\|_\infty \to +\infty$, $f(x,y) \to +\infty$

b) f est coercive donc, par théorème, elle admet un minimum global

Celui-ci se trouve nécessairement parmi les points critiques (cond. néc. du 1er ordre)

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y^9 = y \\ y^3 = x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0, 1, -1 \\ x = 0, 1, -1 \end{cases}$$

donc 3 points critiques $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$f \downarrow$: 0, -2, -2

donc 2 minima globaux : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Chercher les minima de $f(x,y,z) = e^{x-y} + e^{y-x} + z^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} e^{x-y} - e^{y-x} \\ -e^{x-y} + e^{y-x} \\ 2z \end{bmatrix}$$

$\nabla f = 0 \Rightarrow x = y$, $z = 0$

donc <u>points critiques</u> $= (x, x, 0)$ x parcourant $\mathbb{R}$

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x-y}+e^{y-x} & -e^{x-y}-e^{y-x} & 0 \\ -e^{x-y}-e^{y-x} & e^{x-y}+e^{y-x} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- étude locale en 1 point critique

$$Hf(x,x,0) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

étude de la positivité : on peut décomposer la matrice en 2 blocs indépendants M_1, M_2 car dans la forme quadratique associée, il n'y a pas de terme en xz et yz

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

mineurs principaux $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 0 \Rightarrow M_1$ semi-définie positive.

$M_2 = 2 \rightarrow M_2$ est définie positive.

donc $Hf(x,x,0)$ est semi-définie positive. Les conditions nécessaires du 2e ordre sont vérifiées.

mais <u>on ne peut pas conclure</u> sur l'optimalité

<u>autres façons de faire</u>

+ on peut regarder directement la forme quad.

$ax^2 + ay^2 - 2axy + 2z^2 = a(x-y)^2 + 2z^2 \geq 0 \quad \forall x,y,z$

+ on peut aussi réordonner lignes et colonnes

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} z & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} z \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & a \end{bmatrix} \end{array} \quad \left.\begin{matrix} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 2a \\ \Delta_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{semi-déf positive.}$$

- étude globale du hessien.

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} a & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$ avec $a = e^{x-y} + e^{y-x}$

comme précédemment, on peut décomposer $Hf(x,y,z)$ en 2 blocs M_1, M_2

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = a > 0$, $\Delta_2 = 0 \rightarrow M_1$ semi-définie positif.

$M_2 = 2 \rightarrow$ définie positive.

donc finalement, $Hf(x,y,z)$ est semi-définie positif partout (i.e $\forall (x,y,z)$)

$\Rightarrow$ les points critiques sont <u>optima (minima) globaux</u>

on vérifie qu'ils donnent bien tous la même valeur $f(x,x,0) = 2$.

<u>remarque</u> : a posteriori, on constate bien qu'il était impossible de conclure sur l'étude locale car les conditions suffisantes du 2e ordre entraînent l'optimalité locale <u>stricte</u>. Or les points critiques sont sur une même droite $\Delta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, donc on ne peut les séparer les uns des autres par un voisinage.

Méthode simple pour retrouver le gradient et le hessien d'une fonction quadratique.

Soit $f(x) = \frac{1}{2} x \cdot Qx + b \cdot x + c$ avec Q $n \times n$ symétrique

on considère $x = x^* + \delta$ et on va identifier le gradient et le hessien par le dév. de Taylor

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^* + \delta) \cdot Q(x^* + \delta) + b \cdot (x^* + \delta) + c$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} x^* \cdot Qx^*} + \frac{1}{2} \underbrace{x^* \cdot Q\delta} + \frac{1}{2} \delta \cdot Qx^* + \frac{1}{2} \delta \cdot Q\delta + \underbrace{b \cdot x^*} + b \cdot \delta + \underbrace{c}$$

$$x^{*t} Q \delta = \delta^t Q^t x^* = \delta^t Q x^* = \delta \cdot Qx^*$$

$\leftarrow$ Q symétrique

$$= f(x^*) + \delta \cdot Qx^* + b \cdot \delta + \frac{1}{2} \delta \cdot Q\delta$$

$$= f(x^*) + \underbrace{(Qx^* + b)}_{\nabla f(x^*)} \cdot \delta + \frac{1}{2} \delta \cdot \underset{H_f}{Q} \delta$$

on peut maintenant identifier par rapport au dév. de Taylor à l'ordre 2

Exemple : soit $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + x_3$

1) mettre f sous la forme $\frac{1}{2} x \cdot Qx + b \cdot x + c$ avec Q symétrique.

$$Q = Hf = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = 0$$

2) calculer ∇f

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 2 \\ 2x_2 - 4x_1 + 1 \\ 2x_3 + 1 \end{bmatrix}$$

$$Qx + b = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 1 \\ 2x_3 + 1 \end{pmatrix}$$ on retrouve bien la même chose

3) point critique de f

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -2 \\ -4x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$-8x_2 + 2x_2 = -4 - 1 \Rightarrow 6x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow -4x_1 + \frac{5}{3} = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

$x_3 = -\frac{1}{2}$

vérif : $\begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{10}{3} = -2 \\ -\frac{8}{3} + \frac{5}{3} = -1 \\ 2 \times -\frac{1}{2} = -1 \end{cases}$ ok un point critique $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

4) étude du hessien de f : on voit un petit souci pour $\Delta_2 < 0$

soit $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $2 + 2 - 2 \times 4 < 0$

$y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $Q(y) = 2 + 2 + 2 \times 4 > 0$

donc le point critique est un point selle donc pas minimum local (encore moins global)

Minimisation d'une fonction quadratique

Soit une fonction quadratique $q(x) = \frac{1}{2} x \cdot Qx + b \cdot x + c$ avec Q symétrique, $n \times n$ et $x \in \mathbb{R}^n$

1/a) M.q. une condition nécessaire pour que q admette un min. local est

$Q \geq 0$ et $\exists b'$ t.q. $b = Qb'$ (i.e $b \in \mathrm{Im}(Q)$)

b) Montrer que si on a ces conditions, on a en fait un min global.

2) Application : $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$ définie sur $\mathbb{R}^3$

a) ~~Trouver les points critiques de~~ q calculer b et Q

b) q admet-elle des minimas ~~(maximas)~~ locaux, globaux ?

1) a) • CN 1er ordre vue en cours : $\nabla f(x^*) = 0$

ici $\nabla q(x) = Qx + b = 0 \iff b \in \mathrm{Im}\, Q$

• CN 2è ordre vue en cours : $Hf(x^*) \geq 0$

ici $Hq = Q$

Supposons qu'on ne connaisse pas cette CN du 2è ordre vue en cours :

soit x^* min local. $q(x^* + t\delta) = q(x^*) + \underbrace{\nabla q(x^*)}_{0} \cdot t\delta + \frac{1}{2} t^2 \delta \cdot Hq\, \delta$ (Taylor)

et δ t.q. $\delta \cdot Q \delta < 0$ $\quad = q(x^*) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{\delta \cdot Q\delta}_{<0}$

$\Rightarrow q(x^* + t\delta) < q(x^*)$ $\forall t \neq 0 \Rightarrow x^*$ n'est pas min. local.

b) Supposons qu'on a les conditions. Soit x^* solution de :

$\nabla q(x) = 0 \iff Qx + b = 0$ une solution existe par hyp ($b \in \mathrm{Im}\, Q$)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Posons δ t.q. $x = x^* + \delta$

$q(x) = q(x^*) + \underbrace{\nabla q(x^*)}_{0} \cdot \delta + \frac{1}{2} \delta \cdot Hq\, \delta$ (Taylor)

$= q(x^*) + \frac{1}{2} \underbrace{\delta \cdot Q\delta}_{\geq 0}$ $\forall \delta$ donc a fortiori $\forall x$.

on a donc $q(x) \geq q(x^*)$ $\forall x$. x^* est bien min. global.

2) a) $\nabla q = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ 2x_2 - 4x_1 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = 0$ $\quad Q = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ le déterminant du système $\neq 0 \Rightarrow$ solution unique $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

b) $Hq = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b \in \mathrm{Im}\, Q$ pour $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad y \cdot \underbrace{Hq}_{Q}\, y = 2 - 2 \times 4 + 2 = -4 < 0$

donc $Q = Hq$ n'est pas ≥ 0 $\quad$ la condition n'étant pas remplie, q n'admet pas de min.

En effet $q(t, t, 0) = 2t^2 - 4t^2 = -2t^2 \to -\infty$ si $t \to +\infty$

$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 2x_3^2$

$Q = H_q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ donc $b \in \operatorname{Im} Q$

$\Delta_1 = \frac{4}{2}$, $\Delta_2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} > 0$, $\Delta_3 = 2 \times \frac{16}{4} + \frac{1}{2}(-1) = \frac{16}{2} - \frac{1}{2} = \frac{15}{2} > 0$

donc $Q \succ 0$ (définie positif) donc minimum global existe. C'est nécessairement un point critique.

$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_2 - x_1 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_3^2 + x_1 - 2x_2$

$Q = H_q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $b \overset{?}{\in} \operatorname{Im} Q \iff \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 = -2 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$ impossible

c'est équivalent à vrai qu'il n'y a pas de point critique.

Caractérisation des fonctions quadratiques coercives.

Exercice 31.

a) Soit A une matrice $n\times n$ symétrique. Diagonaliser A pour montrer que

$$\frac{x^T A x}{\|x\|^2}$$

est plus grand ou égal à la plus petite valeur propre de A $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

b) montrer que la forme quadratique $x^T A x$ est coercive si et seulement si A est définie positive

c) montrer que si $f(x) = b\cdot x + \frac{1}{2} x^T A x$ est une fonction quadratique quelconque $b \in \mathbb{R}^n$ et A matrice $n\times n$ symétrique alors $f(x)$ est coercive ssi A est définie positive.

A.N. montrer que $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1 + 2x_2$ est coercive.

$f(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{3x_2^2}{2} + \sqrt{3}\, x_1 x_2$ n'est pas coercive

a) A est symétrique donc elle admet n vecteurs propres unitaires et orthogonaux u_i

Ils forment une base. Exprimons x dans cette base : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$

$$x\cdot Ax = \left(\sum x_i u_i\right)\cdot A\left(\sum x_i u_i\right) = \left(\sum x_i u_i\right)\cdot\left(\sum_i x_i \lambda_i u_i\right) = \sum_i x_i^2 \lambda_i \geqslant \lambda \sum_i x_i^2 = \lambda \|x\|^2$$

$$\|x\|^2 = x\cdot x = \left(\sum x_i u_i\right)\cdot\left(\sum x_i u_i\right) = \sum_i x_i^2$$

b) $\Leftarrow$ supposons A déf. positive.

λ la plus petite valeur propre est strict^t positive.

$x^T A x \geqslant \lambda \|x\|^2$ et $\lambda > 0 \Rightarrow x^T A x \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

$\Rightarrow$ supposons $x^T A x$ coercive

Soit u vecteur propre unitaire associé à λ plus petite valeur propre de A

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u\cdot A\alpha u = \alpha^2 \lambda$ quand $\alpha \to +\infty$ $\|\alpha u\| = \alpha\|u\| = \alpha \to +\infty$

et donc $\alpha^2\lambda \to +\infty$ et donc $\lambda > 0$.

c) $\Leftarrow$ supposons A déf. positive.

$$f(x) = b\cdot x + \frac{1}{2} x^T A x \geqslant \underbrace{-\|b\|\,\|x\|}_{\text{Cauchy-Schwarz}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\lambda \|x\|^2}_{a)}$$

(plus petite valeur propre.) $\lambda > 0 \Rightarrow f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$

$\Rightarrow$ supposons f coercive.

Soit u vecteur propre unitaire associé à λ plus petite valeur propre de A

$\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha u) = \alpha\, b\cdot u + \frac{1}{2}\alpha^2\lambda$

si $b\cdot u \leq 0$ $\alpha \to +\infty \Rightarrow \|\alpha u\| = \alpha\|u\| = \alpha \to +\infty \Rightarrow f(\alpha u) \to +\infty \Rightarrow \alpha^2\lambda \to +\infty \Rightarrow \lambda > 0$

si $b\cdot u > 0$ $\alpha \to -\infty \Rightarrow \|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\| = |\alpha| \to +\infty \Rightarrow f(\alpha u) \to +\infty \Rightarrow \alpha^2\lambda \to +\infty \Rightarrow \lambda > 0$

Autre démonstration

Pour b) et c) dans le sens $\Rightarrow$ on n'est pas obligé de passer par vecteurs propres

b) $\Rightarrow$ supp. $x^T A x$ coercive.

$\forall x \neq 0 \qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \xrightarrow{\alpha \to +\infty} +\infty$

$(\alpha x) \cdot A(\alpha x) = \alpha^2 x \cdot A x \xrightarrow{\alpha \to +\infty} +\infty \quad \Rightarrow \quad x \cdot A x > 0$

c) $\Rightarrow$ supposons $f(x)$ coercive

$\forall x \neq 0 \qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \xrightarrow{\alpha \to \pm\infty} +\infty$

$$f(\alpha x) = \alpha(b \cdot x) + \frac{1}{2}\alpha^2 \, x \cdot A x$$

si $b \cdot x \leq 0 \qquad f(\alpha x) \xrightarrow{\alpha \to +\infty} +\infty \Rightarrow \alpha^2 x \cdot A x \to +\infty \Rightarrow x \cdot A x > 0$

si $b \cdot x > 0 \qquad f(\alpha x) \xrightarrow{\alpha \to -\infty} +\infty \Rightarrow \alpha^2 x \cdot A x \to +\infty \Rightarrow x \cdot A x > 0$

A.N. $f(x_1, x_2) = \underbrace{-x_1 + 2x_2}_{b \cdot x} + \underbrace{5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}_{\frac{1}{2} x \cdot A x}$

$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 10 > 0 \\ \Delta_2 = 16 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ A définie positive

donc f coercive

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{3x_2^2}{2} + \sqrt{3}\, x_1 x_2 = \frac{1}{2} x \cdot A x$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 1 > 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ A est semi-définie positive

donc f n'est pas coercive.

vérifions le : $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \sqrt{3}\, x_2\right)^2$

$f(-\sqrt{3}x_2, x_2) = 0 \quad \forall x_2$

et $\|(-\sqrt{3}x_2, x_2)\|^2 = 4x_2^2 \longrightarrow +\infty$

Trouver global minimiseur de :

$$f(x,y,z) = e^{x-y} + e^{y-x} + e^{x^2} + z^2$$

pt critique : $\nabla f = \begin{pmatrix} e^{x-y} - e^{y-x} + 2x e^{x^2} \\ -e^{x-y} + e^{y-x} \\ 2z \end{pmatrix}$ (pt critique solution de $\nabla f = \vec{0}$.)

calcul du pt critique :

$\Rightarrow z = 0$

$$e^{x-y} = e^{y-x} \Rightarrow x - y = y - x \Rightarrow x = y$$

$$\underbrace{e^{x-y} - e^{y-x}}_{0 \text{ d'après la ligne du dessus}} + 2x e^{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

1 point critique $(0,0,0)$

calcul Hessien

$$Hf = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} e^{x-y} + e^{y-x} + 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} & -e^{x-y} - e^{y-x} & 0 \\ -e^{x-y} - e^{y-x} & e^{x-y} + e^{y-x} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$\Delta_1 > 0$

$$\Delta_2 = (e^{x-y} + e^{y-x})^2 + (e^{x-y} + e^{y-x})(2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}) - (e^{x-y} + e^{y-x})^2$$

$$= (e^{x-y} + e^{y-x})^{\cancel{2}} (2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}) > 0$$

$$\begin{array}{cc} C_1 + C_2 & C_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} & -e^{x-y} - e^{y-x} \\ 0 & e^{x-y} + e^{y-x} \end{bmatrix}} \end{array}$$

$\Delta_3 = 2\Delta_2 > 0$

$\Rightarrow Hf$ définie positive.

Donc $(0,0,0)$ est minimiseur global strict

$$\begin{array}{ccc} C_1 + C_2 & C_2 & C_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} A & & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \end{array}$$

triangulaire $\Rightarrow \Delta_3 = A \cdot B \times 2 = \Delta_2 \times 2$

autre dém. $Hf = \begin{bmatrix} a+b & -a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = a + b > 0$

$\Delta_2 = (a+b)a - a^2 = ab > 0$

$\Delta_3 = 2ab > 0$

avec $a = e^{x-y} + e^{y-x}$ et $b = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}$

<u>trouver global minimiseur de</u> : $f(x,y) = e^{x-y} + e^{y-x}$

point critique : $\nabla f = \begin{pmatrix} e^{x-y} - e^{y-x} \\ -e^{x-y} + e^{y-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x-y = y-x \Rightarrow x = y$

Hessien

$$Hf = \begin{pmatrix} e^{x-y} + e^{y-x} & -e^{x-y} - e^{y-x} \\ -e^{x-y} - e^{y-x} & e^{x-y} + e^{y-x} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 > 0$
$\Delta_2 = 0$ $\Rightarrow$ Hf semi-définie positive. (voir remarque)

les points $x = y$ sont des <u>minimiseurs globals</u>

<u>trouver global minimiseur de</u> : $f(x,y) = e^{x-y} + e^{x+y}$

point critique

$\nabla f = \begin{pmatrix} e^{x-y} + e^{x+y} \\ -e^{x-y} + e^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e^{x-y} + e^{x+y} = 0$ impossible $\Rightarrow$ pas de point critique $\Rightarrow$ pas de minimiseur.

Nature des points critiques de : $e^{x^2}+e^{y^2}-2x^2-2y^2$

$$\nabla f = \begin{cases} 2x\cdot e^{x^2}-4x \\ 2y\cdot e^{y^2}-4y \end{cases}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2\cdot e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}-4 & 0 \\ 0 & 2e^{y^2}+4y^2\cdot e^{y^2}-4 \end{pmatrix}$$

<u>points critiques:</u>

$\nabla f = 0 \Rightarrow 2x\,(e^{x^2}-2)=0 \Rightarrow x=0$

$e^{x^2}=2 \Rightarrow x^2=\log 2 \quad x=\pm\sqrt{\log 2}$

de m̂ pour y : $y=0$

$e^{y^2}=2 \Rightarrow y^2=\log 2 \quad y=\pm\sqrt{\log 2}.$

1/ $(0,0)$: $Hf=\begin{pmatrix} 2-4 & 0 \\ 0 & 2-4 \end{pmatrix}$ défini <0 $\Rightarrow$ $(0,0)$ max local.

2/ $(0,+\sqrt{\log 2})$: $Hf=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4+4\log 2\cdot 2-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8\log 2 \end{pmatrix}$

indéfini $\Rightarrow$ $(0,+\sqrt{\log 2})$ point selle

3/ $(0,-\sqrt{\log 2})$: identique

4/ $(\sqrt{\log 2},0)$: $Hf=\begin{pmatrix} 8\log 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indéfini $\Rightarrow$ point selle

5/ $(\sqrt{\log 2},\sqrt{\log 2})$: $Hf=\begin{pmatrix} 8\log 2 & 0 \\ 0 & 8\log 2 \end{pmatrix}$ défini >0 $\Rightarrow$ min local.

6/ $(\sqrt{\log},-\sqrt{\log 2})$: indentique.

7/ $(-\sqrt{\log 2},0)$: idem à $(\sqrt{},0)$

8/ $(-\sqrt{\log 2},\sqrt{\log 2})$: idem à $(\sqrt{},\sqrt{})$

9/ $(-\sqrt{\log 2},-\sqrt{\log 2})$: idem à $(\sqrt{},-\sqrt{})$

Y-a-t-il un minimum global ?

Pour répondre à cette question on ne peut pas utiliser le Hessien car on a vu qu'il n'est pas toujours défini positif.

Cependant la fonction est coercive.

En effet : faisons tendre $\sqrt{x^2+y^2}$ vers ∞.

$\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty \Rightarrow x^2$ ou $y^2 \to +\infty$

$\Rightarrow e^{x^2}+e^{y^2}-2x^2-2y^2 \to +\infty$ car exponentielle l'emporte

elle est coercive donc admet un minimum global.

le min global ne peut être que parmi les min. locaux : $(\pm\sqrt{\log 2}, \pm\sqrt{\log 2})$

(même parmi les points critiques) mais il y en a beaucoup

Pour ces 4 points on obtient la même valeur de la fonction : $2+2-2\log 2 - 2\log 2$

$= 4 - 4\log 2$

$= 4(1-\log 2) \approx 1{,}22$

$f(0, \pm\sqrt{\ }) = f(\pm\sqrt{\ }, 0) = 1{,}81$

$f(0,0) = 2$

les autres points critiques donnent des valeurs $\geq$ car ce sont des maximas, ou des points selles.

On peut utiliser $\|(x,y)\|_\infty$ pour démontrer que la fonction est coercive :

$e^{x^2}+e^{y^2} \geq e^{\|(x,y)\|_\infty^2}$ car $\|(x,y)\|_\infty = \sup\{|x|, |y|\}$

$-x^2-y^2 \geq -2\|(x,y)\|_\infty^2$

$e^{x^2}+e^{y^2}-2x^2-2y^2 \geq e^{\|(x,y)\|_\infty^2} - 4\|(x,y)\|_\infty^2$

posons $\|x,y\|_\infty^2 = \alpha^2$ $\quad e^{\alpha^2} - 4\alpha^2 \to +\infty$ quand $\alpha \to +\infty$

Déterminer les extremums des fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\boxed{f(x,y,z) = x^2y + y^2z + 2x - z}$$

points critiques :

① $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2 = 0$, ② $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 - 1 = 0$ ③

③ $\Rightarrow y = \pm 1$

① et $y = \pm 1 \Rightarrow x = \mp 1$

② et $y = \pm 1$ et $x = \mp 1 \Rightarrow 1 \pm 2z = 0 \Rightarrow z = \mp \frac{1}{2}$

2 points $\left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right)$ $\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$

Hessien aux points critiques.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

- en $\left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad H_f\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

dét $H_f = -8$
on impair mais H_f n'est pas déf. négatif $(\Delta_1 > 0)$
donc H_f indéfini. (toutes les valeurs propres ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ne sont pas négatives $\ell_1 \ell_2 \ell_3 = -8$ et l'une d'entre elles est > 0)

chercher les valeurs propres est difficile car équation de degré 3 à résoudre.
On choisit la décomposition en somme de carrés de formes lin^t. ind^t :

$$q(x,y,z) = (x\ y\ z)\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad q(x,y,z) = \frac{1}{a_{11}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \underbrace{q_1(y,z)}_{\text{ind}^t \text{ de } x}$$

$$q(x,y,z) = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{2}(4x - 4y)\right]^2 - 2y^2 + (y\ z)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

$$q(x,y,z) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}y + a_{13}z)^2 + \begin{array}{c|cc} & y & z \\ \hline y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{23} & a_{33} \end{array}$$

$$q_1(y,z) = (y\ z)\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \qquad q_1(y,z) = \frac{1}{a_{22}}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial q_1}{\partial y}\right]^2 + q_2(z)$$

$$q_1(y,z) = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(-6y + 4z)\right]^2 + \frac{4}{3}z^2 + z[0]z$$

finalement $q(x,y,z) = \frac{1}{2}(2x - 2y)^2 - \frac{1}{3}(-3y + 2z)^2 + \frac{4}{3}z^2$

il y a un coeff. > 0 et un coeff < 0 donc indéfini (ni positif, ni négatif)

Par exemple $q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) = \frac{4}{3}$ $\qquad q(1, 1, 0) = -3$

indéfini $\Rightarrow \left(-1, 1, -\frac{1}{2}\right)$ point selle

en $\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$ $\quad H_f\left(1,-1,\frac{1}{2}\right) = -H_f\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$ donc indéfini et point selle

$$\boxed{f(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2-y^2)z - 4z}$$

<u>points critiques</u> :

① $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2xz = 0$, ② $\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 - 2yz = 0$, ③ $\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 - y^2 - 4 = 0$

① et $x \neq 0 \Rightarrow y^2 + z = 0$
② et $y \neq 0 \Rightarrow x^2 = z$
donc $x \neq 0$ et $y \neq 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow x = y = 0$ impossible.

③ et $x = 0 \Rightarrow y^2 = -4$ impossible
③ et $y = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

2 points critiques : $(2,0,0)$, $(-2,0,0)$

<u>hessien aux points critiques</u>.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 + 2z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 2z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

- en $(2,0,0)$: $Hf(2,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

dét $Hf = -4 \times 8 \times 4 < 0$
n impair mais Hf n'est pas défini négatif ($\Delta_1 = 0$)
donc Hf indéfini.

<u>recherche des valeurs propres</u> : $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(8-\lambda)(-\lambda) + 4 \times 4(\lambda - 8) = (\lambda - 8)(-\lambda^2 + 4 \times 4) = 0$

$\lambda = 8$, $\lambda = 4$, $\lambda = -4$ donc indéfini.

<u>décomposition en somme de carrés</u> : $q(x,y,z) = 8y^2 + 2 \times 4xz = 8y^2 + 2(x+z)^2 - 2(x-z)^2$
on retrouve le même résultat car un coeff >0 et un coeff <0

$(2,0,0)$ est un point selle

en $(-2,0,0)$: $Hf(-2,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>décomposition en somme de carrés ind^t</u> : $q(x,y,z) = 8y^2 - 8xz = 8y^2 - 2(x+y)^2 + 2(x-y)^2$
donc indéfini.

$(-2,0,0)$ est un point selle.

Déterminer les extremums des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\boxed{f(x,y) = \operatorname{arctg} xy}$$

dérivée de $\operatorname{arctg} z = \dfrac{1}{1+z^2}$

pt critique :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+(xy)^2} \times y = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(xy)^2} \times x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$$

Hessien de f au pt critique :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2xy^3}{(1+(xy)^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1-(xy)^2}{(1+(xy)^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^3y}{(1+(xy)^2)^2}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ indéfini $\Rightarrow$ $(0,0)$ point selle

$$\boxed{f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy}$$

points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2 + y = 0 \quad (1) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy + x = 0 \quad (2)$$

(1) $y \neq 0 \Rightarrow 2x + 1 = y$ (2) $x \neq 0 \Rightarrow 2y - 1 = x$

donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = y \\ 2y - 1 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$

$y = 0$ (2) $\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}$

$x = 0$ (1) $\Rightarrow -y^2 + y = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}$

Hessien aux points critiques

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - 2y + 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$

valeurs propres λ_1, λ_2 et $\lambda_1\lambda_2 = -1$ donc l'une est positive et l'autre négative.

en $(0,0)$ $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indéfini $\Rightarrow$ $(0,0)$ point selle

en $(-1,0)$ $Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ valeurs propres : $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

$\Delta' = 1 + 1 = 2$ $\left.\begin{array}{l} \lambda = +1 + \sqrt{2} > 0 \\ \lambda = 1 - \sqrt{2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ indéfi

décomposition en carrés de formes lin^t. ind^t : $q(x) = (x_1\, x_2)\, Hf\, (x_1\, x_2)$

$a_{22} \neq 0 \Rightarrow q(x) = \dfrac{1}{a_{22}} \left(\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial q}{\partial x_2} \right)^2 + q_1(x) = \dfrac{1}{8} (-2x_1 + 4x_2)^2 - \dfrac{x_1^2}{2}$ $\quad \frac{1}{8} > 0$ et $-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ indéfini.

$q_1(x)$: ind^t de x_2

$(-1,0)$ point selle

en $(0,1)$: $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ permutes le rôle de x et y et on retrouve le précédent cas donc indéfini $\Rightarrow (0,1)$ pt selle

en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$: $Hf\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

mineurs principaux :

$\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0 \Rightarrow$ défini positif.

décomposition en carrés de formes ind^t :

$q(x) = \dfrac{1}{a_{11}} \left(\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial q}{\partial x_1} \right)^2 + q_2(x) = \dfrac{1}{8} (4x_1 - 2x_2)^2 + \dfrac{3}{2} x_2^2$ $\quad \frac{1}{8} > 0$, $\frac{3}{2} > 0 \Rightarrow$ défini positif.

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ minimum local $\quad f\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$ or $f(1,-1) = -3$ donc $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ne peut être min global donc il n'y a pas de min global

Il n'y a pas de minimum global car $f(y/2, y) = -y^3/ + y^2/ \xrightarrow{y \to +\infty} -\infty$

$\boxed{f(x,y) = \sin x \sin y}$

points critiques

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y = 0$ rappel : $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$

1er cas : $\cos x = 0$ et $\cos y = 0$ i.e. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + k'\pi$ $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$

2è cas : $\sin y = 0$ et $\sin x = 0$ i.e. $y = k\pi$, $x = k'\pi$

hessien aux points critiques :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \sin y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \sin y$

pour le cas 1 : si k et k' de même parité (i.e $k+k'$ pair) $Hf = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ défini négatif $\Rightarrow$ maximum local

si k et k' de parités différentes (i.e $k+k'$ impair) $Hf = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ défini positif $\Rightarrow$ minimum local

le max. local est aussi global car f en ce point vaut 1 et $f(x,y) \leq 1$ $\forall x,y$.
de même pour le min. local.

pour le cas 2 : si k et k' de même parité $Hf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indéfini $\Rightarrow$ point selle

si k et k' de parités différentes $Hf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ indéfini $\Rightarrow$ point selle

$\boxed{f(x,y) = xy^2 + \operatorname{Log}(1+x^2)}$

point critique :

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 + \dfrac{2x}{1+x^2} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 0$ (2)

(2) $\Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$ si $x = 0$ (1) $\Rightarrow y = 0$
si $y = 0$ (1) $\Rightarrow x = 0$

un seul point $(0,0)$

Hessien en $(0,0)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semi-définie positive donc on ne peut pas conclure.

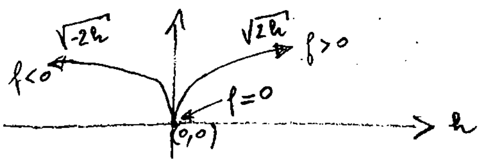
Rappel : $\operatorname{Log}(1+x) = x + |x|\varepsilon(x)$

Considérons $f(h, \sqrt{2h})$ pour $h > 0$: $f(h, \sqrt{2h}) = 2h^2 + \operatorname{Log}(1+h^2) = 2h^2 + \left(h^2 + h^2\varepsilon(h^2)\right)$
$= h^2(3 + \varepsilon(h^2)) > 0$ pour h petit

Considérons $f(h, \sqrt{-2h})$ pour $h < 0$: $f(h, \sqrt{-2h}) = -2h^2 + \operatorname{Log}(1+h^2) = -2h^2 + \left(h^2 + h^2\varepsilon(h^2)\right)$
$= h^2(-1 + \varepsilon(h^2)) < 0$ pour h petit.

$f(0,0) = 0$ et dans une "direction" (au voisinage de $(0,0)$) $f > 0$
dans une autre "direction" (au voisinage de $(0,0)$) $f < 0$

donc $(0,0)$ n'est pas un minimum local.



IIE1 MOM TD 2

Exercice 1.

Soit une forme quadratique $q(x) = x^T Qx + b^T x + c$ définie sur $\mathbb{R}^n$. Q symétrique

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que q admette une borne inférieure finie est
$$Q \succeq 0 \text{ et } \exists b' / b = Qb' \text{ (i.e. } b \in R(Q))$$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que q admette une borne supérieure finie.
3. Application : Soit $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2$ définie sur $\mathbb{R}^3$.
   (a) Trouver les points critiques de f.
   (b) f admet-elle des minima (maxima) locaux, globaux?

Exercice 2.

Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}^2$par $f(x,y) = -y^2 \left(x^2 + y^2 - 4y\right) \left(x^2 + y^2 + 4y\right)$.

1. Etudier le signe de f, et tracer dans le plan les résultats de cette étude.
2. On se place à l'origine (0,0).
   (a) Montrer que dans toutes les directions la fonction f est positive sur un intervalle non vide (mais dépendant de la direction).
   (b) Mieux : montrer que dans toutes les directions la fonction f est croissante (ou constante) sur un intervalle non vide (mais dépendant de la direction).
3. (0,0) est-il par conséquent un minimum local?
4. Construire un autre exemple où la fonction est strictement croissante dans toutes les directions.

CORRECTION

<u>C.N.</u> • $H_q \geq 0 \to Q \geq 0$
• $\nabla q(x^*) = 0 \to 2Qx^* = -b$
$\to Q\underbrace{(-2x^*)}_{b'} = b$

1.

$H_q = 2Q \qquad \nabla q = 2Qx + b$

Conditions nécessaires.

* Si Q n'est pas positive alors $\exists y \in \mathbb{R}^p$ tel que $y^TQy < 0$, et alors $q(ty)$ tend vers $-\infty$ pour $t \to \infty$ ($q(ty) = t^2y^TQy + ty^Tb + c$).

* Si $b \notin R(Q)$ alors $\exists b_N \neq 0$ dans $ker(Q) = (R(Q))^\perp$ (car Q est symétrique), en effet on a $b = b_N + b_R$ et toujours $b \notin R(Q)$ d'où

$$q(-tb_N) = b^T(-tb_N) + c = -t\|b_N\|^2 + c$$

qui tend vers $-\infty$ pour $t \to \infty$.

Conditions suffisantes.

on a $\nabla q(x) = 0$ équivalent à $2Qx = -b$. Ce système a au moins une solution puisque $b \in R(Q)$. Soit y quelconque, on écrit $y = x + \delta$, on a :

$$\begin{aligned} q(x+\delta) &= (x+\delta)^T Q (x+\delta) + b^T(x+\delta) + c \\ &= q(x) + (2Qx+b)^T\delta + \delta^TQ\delta \end{aligned}$$

et on reconnait la formule de Taylor (développement exact à l'ordre 2 puisque q est quadratique) :

$$\begin{aligned} q(x+\delta) &= q(x) + \nabla q(x)^T\delta + \delta^TQ\delta \\ &= q(x) + \delta^TQ\delta \\ &\geq q(x) \end{aligned}$$

car $\nabla q(x) = 0$ et $\delta^TQ\delta \geq 0$ (Q est positive).

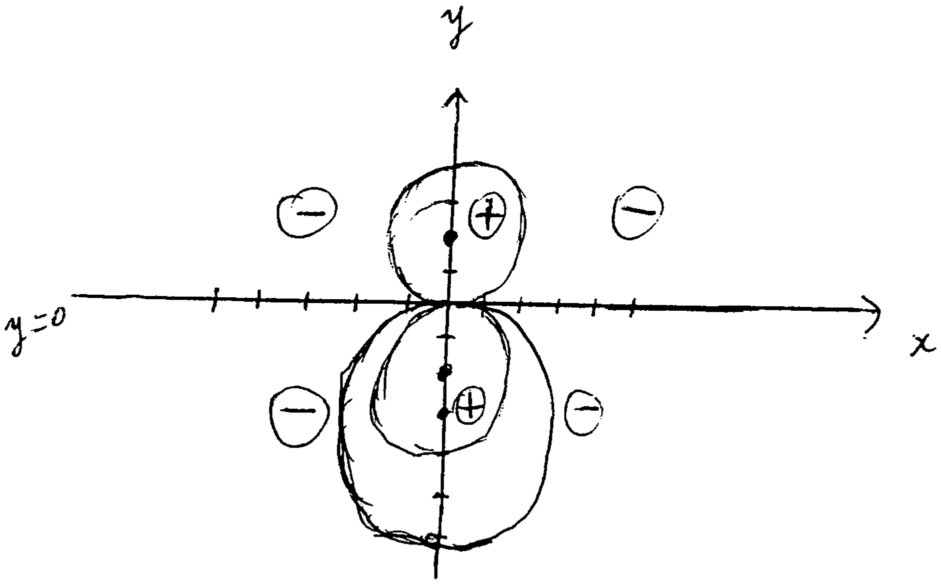
on a $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ 2x_2 - 4x_1 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = 0$. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-16) \neq 0$. Donc une solution unique (0,0,0)

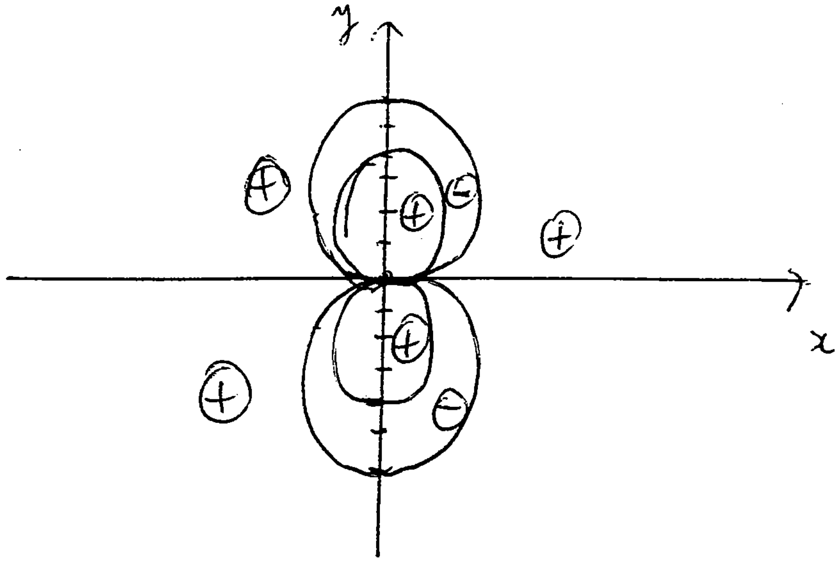
Son Hessien (constant) est $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il y a des mineurs symétriques de signe strictement positif et strictement négatif : la matrice n'est ni positive, ni négative : pas de borne inférieure ni supérieure. En fait les valeurs propres sont : 2,6, -2. Un vecteur propre associé à 2 est : (0,0,1) . En effet, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à -2 est $(\overset{1}{\cancel{0}},\overset{1}{\cancel{0}},\overset{0}{\cancel{1}})$. En effet, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a bien $\lim_{t\to\infty} f(t,t,0) = \lim_{t\to\infty} -2t^2 = -\infty$. Donc (0,0,0) pas un minimiseur de f. Et d'autre part : $\lim_{x_3\to\infty} f(\overset{\text{lié}}{x_1,x_2},x_3) = \infty$. Donc (0,0,0) n'est pas un maximiseur de f.

Ainsi (0,0,0) est un point selle : ce n'est pas un extremum local non plus puisque $f(0,0,0) = 0$ et $\forall\delta > 0$ $f(\delta,\delta,0) = -2\delta^2 < 0$, $f(0,0,\delta) = \delta^2 > 0$.





$$f(x,y)=\left(x^2+y^2-4y\right)\left(x^2+y^2+4y\right)\left(x^2+y^2+6y\right)\left(x^2+y^2-6y\right)$$

2.

Etude du signe de f dans $\mathbb{R}^2$

(x,y) $\in$disque de centre (0,2) et de rayon 2	$f(x,y) \geq 0$ et $f(x,y) = 0$ si (x,y) est sur le cercle
(x,y) $\in$disque de centre $(0,-2)$ et de rayon 2	$f(x,y) \geq 0$ et $f(x,y) = 0$ si (x,y) est sur le cercle
$(x,0)$	$f(x,y) = 0$
Pour les autres (x,y)	$f(x,y) < 0$

On se place à l'origine (0,0). Montrons que dans toutes les directions données par une équation de droite de la forme $y = ax$ avec a réel quelconque, il existe un intervalle (dépendant de la direction choisie) sur lequelle la fonction est positive. On prend donc $y = ax$ et on remplace dans l'expression de f : $f(x,ax) = -a^2x^2\left(x^2 + a^2x^2 - 4ax\right)\left(x^2 + a^2x^2 + 4ax\right)$.

Remarquons que :

$A = \left(x^2 + a^2x^2 - 4ax\right)\left(x^2 + a^2x^2 + 4ax\right) \leq 0$ pour x suffisamment petit (mais non nul !).

Prenons $a \neq 0$ (si $a = 0$ le résultat est évident). Par symétrie de l'expression, on peut supposer $x > 0$ et $a > 0$. On a $x^2 + a^2x^2 + 4ax \geq 0$ et $x^2\left(1 + a^2\right) - 4ax \leq 0$ en prenant x suffisamment petit (en fait $0 < x \leq \frac{4a}{1+a^2}$). Par conséquent, en prenant x suffisamment petit on a toujours $f(x,ax) \geq 0$.

Calculons la dérivée de la fonction réelle

$$\begin{aligned}
f(x,ax) &= -a^2x^2\left(x^2 + a^2x^2 - 4ax\right)\left(x^2 + a^2x^2 + 4ax\right) \\
g(x) &= -a^2x^2\left[\left(x^2 + a^2x^2\right)^2 - 16a^2x^2\right] \\
g(x) &= -a^2\left(1 + a^2\right)^2 x^6 + 16a^4x^4 \\
g'(x) &= -6a^2\left(1 + a^2\right)^2 x^5 + 64a^4x^3
\end{aligned}$$

D'où $g'(x) > 0$ pour $0 < x < \frac{8a^2}{(1+a^2)\sqrt{6a^2}}$

et $g'(x) < 0$ pour $-\frac{8a^2}{(1+a^2)\sqrt{6a^2}} < x < 0$.

Peut-on en conclure que (0,0) est un minimum local de f ? NON. Prenons le cercle de rayon 4 et de centre $(0,-3)$. L'équation de ce cercle est $x^2 + (y+3)^2 = 9$. i.e. $x^2 + y^2 + 6y = 0$. Prenons un point sur ce cercle tel que $x > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= -y^2\left(-6y - y^2 + y^2 - 4y\right)\left(-6y - y^2 + y^2 + 4y\right) \\
&= -y^2(-10y)(-2y) < 0
\end{aligned}$$

Donc (0,0) n'est pas minimum local.

CHAPITRE VI - FORMES QUADRATIQUES

VI.1. Rappels de théorie

a) Définition

Une forme quadratique en les variables $x_1, \ldots, x_n$ est une expression du type $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ où $a_{ij} = a_{ji}$. On peut écrire cette expression sous la forme matricielle $q(X) = {}^tXAX$

où A est une matrice n-carrée symétrique et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

b) Différents types de formes quadratiques

Une forme quadratique q est dite
- définie positive (DP) si $q(X) > 0, \forall X \neq 0$
- définie négative (DN) si $q(X) < 0, \forall X \neq 0$
- semi-positive (SP) si $q(X) \geq 0, \forall X \neq 0$
  - et si il existe $X' \neq 0$ tel que $q(X') = 0$ et
  - et si il existe $X'' \neq 0$ tel que $q(X'') > 0$.
- semi-négative (SN) si $q(X) \leq 0, \forall X \neq 0$
  - et si il existe $X' \neq 0$ tel que $q(X') = 0$ et
  - et si il existe $X'' \neq 0$ tel que $q(X'') < 0$.
- indéfinie (I) si
  - il existe $X' \neq 0$ tel que $q(X') > 0$ et
  - et si il existe $X'' \neq 0$ tel que $q(X'') < 0$.
- nulle (0) si $q(X) = 0, \forall X \neq 0$
- semi-définie positive (SDP) si $q(X) \geq 0, \forall X \neq 0$
- semi-definie négative (SDN) si $q(X) \leq 0, \forall X \neq 0$

c) diagonalisation d'une forme quadratique

Le signe d'une expression quadratique est facile à étudier lorsque A est diagonale. On a alors $q(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ où $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

De plus toute matrice A symétrique peut être diagonalisée par une matrice R orthogonale.
Soit R la matrice orthogonale, inversible, telle que $R^{-1}AR = B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On a $q(X) = {}^tXAX = {}^tXRB{}^tRX = {}^t(RX)\,B\,(RX)$. En posant $Y = RX$, on a $q = {}^tYBY$.

Le théorème de Sylvester annonce que « *pour toute réduction d'une forme quadratique au type diagonal par une matrice régulière, le nombre des coefficients positifs, nuls et négatifs est invariable* ».
Les matrices A et ${}^tRBR$ sont de même classe.

Corollaires :
- une matrice symétrique DN ou DP est inversible
- une matrice inversible est DN, DP ou I (sans valeur propre nulle)

- une matrice SDP ou SDN est singulière
- une matrice singulière est SDN, SDP ou I (avec au moins une valeur propre nulle)

d) Classification à l'aide des mineurs primaires ou privilégiés

On appelle *mineur privilégié* d'ordre i ($1 \leq i \leq n$) le déterminant D_i de la sous-matrice de dimension i constituée des éléments de A situés dans les n premières lignes et n premières colonnes de A (coin nord ouest de A).

On a donc $D_1 = a_{11}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, …, $D_n = |A|$

On peut démontrer les propriétés suivantes :

- A est DP $\Leftrightarrow D_i > 0, \forall i=1,\ldots,n$
- A est DN $\Leftrightarrow (-1)^i D_i > 0, \forall i=1,..,n$ (les mineurs privilégiés d'ordre impair sont négatifs et les mineurs d'ordre pair sont positifs)
- Si $D_i>0, \forall i=1,\ldots,n-1$ et $D_n=0$, alors A est SP
- Si $(-1)^i D_i > 0, \forall i=1,\ldots,n-1$ et $D_n=0$, alors A est SN

e) Classification à l'aide des mineurs principaux

On appelle mineur principal d'ordre i ($1 \leq i \leq n$) tout mineur dont la diagonale principale est constituée d'éléments de la diagonale principale de A.
On a donc

- $M_1 = a_{11} = D_1$, $M_2 = a_{22}$, … $M_n = a_{nn}$
- $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D_2$, $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $M_{123} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_3$, etc..

On peut démontrer les propriétés suivantes :

- A est nulle $\Leftrightarrow$ tous les mineurs principaux sont nuls
- A est SDP $\Leftrightarrow$ tous les mineurs principaux sont non négatifs
- [redacted]
- A est SP $\Leftrightarrow$ A est singulière, non nulle et a tous ses mineurs principaux non négatifs
- A est SN $\Leftrightarrow$ A est singulière, non nulle et a tous ses mineurs principaux non positifs
- A est indéfinie $\Leftrightarrow$ un mineur principal d'ordre pair est négatif
- A est indéfinie $\Leftrightarrow$ il existe deux mineurs principaux d'ordre impair de signes contraires.

f) Classification à partir des valeurs propres

Une matrice réelle symétrique, non nulle est

- DP $\Leftrightarrow$ toutes ses valeurs propres sont positives
- DN $\Leftrightarrow$ toutes ses valeurs propres sont négatives
- SP $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre et toutes les autres valeurs propres sont positives
- SN $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre et toutes les autres valeurs propres sont négatives
- I $\Leftrightarrow$ il existe deux valeurs propres de signes contraires

- SDP ⇔ toutes les valeurs propres sont positives ou nulles
- SDN ⇔ toutes les valeurs propres sont négatives ou nulles

VI.2. Formes quadratiques sous contrainte linéaire

a) Position du problème

Soit $q = {}^tXAX$ une forma quadratique à n variables, soumise à une condition linéaire $BX = 0$ où B est une matrice de dimension m x n ($0<m<n$), de rang m (m contraintes linéairement indépendantes).

Si A est une matrice n-carrée symétrique et B une matrice de la forme m x n, de rang m, la valeur de la forme quadratique $q = {}^tXAX$ sous la condition $BX=0$ est égale à la valeur de la forme quadratique $q^* = {}^tZA^*Z$ où Z est le vecteur colonne de dimension n-m dont les composantes sont les n-m dernières composantes de X et A* une matrice (n-m) carrée symétrique.

On passe donc de l'étude de q à celle de q*, qui elle n'est pas soumise aux contraintes. Il reste à connaître A*. Cela se fait à l'aide de la propriété suivante :

La matrice A* possède des liens avec la matrice bordée $\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & A \end{pmatrix}$:

Un mineur principal de $\overline{A}$ est dit dominant lorsque sa diagonale principale contient les 2m premiers éléments comptés à partir du coin nord-ouest de la diagonale principale de $\overline{A}$. Par conséquent, tout mineur privilégié de $\overline{A}$ d'ordre supérieur à 2m est dominant.
Tout mineur principal (ou privilégié) d'ordre p de A possède le même signe que celui de $(-1)^m$ fois un mineur principal (ou privilégié) dominant d'ordre 2m+p de $\overline{A}$.*
Par conséquent, si m=1, les mineurs principaux dominants de $\overline{A}$ ont le signe contraire des mineurs principaux de A*.

On en déduit la classification suivante des formes quadratiques soumises à une contrainte linéaire :

- la forme q est positive ⇔ tous les mineurs privilégiés d'ordre 2m+p de $\overline{A}$ sont non nuls et de même signe que $(-1)^m$.
- la forme q est négative ⇔ tous les mineurs privilégiés d'ordre 2m+p de $\overline{A}$ sont non nuls et de même signe que $(-1)^{m+p}$.
- la forme q est indéterminée ⇔ un mineur principal dominant de $\overline{A}$ d'ordre pair soit non nul et de même signe que $(-1)^{m+1}$ ou deux mineurs principaux dominants de $\overline{A}$ d'ordre impair soient non nuls et de signes différents.
- La forme q est nulle ⇔ tous les mineurs principaux dominants de $\overline{A}$ sont nuls
- q est positive ou nulle ⇔ $\overline{A}$ est singulière et tous ses mineurs principaux dominants d'ordre 2m+p sont nuls ou de même signe de $(-1)^m$
- q est positive ou nulle ⇔ $\overline{A}$ est singulière et tous ses mineurs principaux dominants d'ordre 2m+p sont nuls ou de même signe de $(-1)^{m+p}$

VI.3. Exercices

1) Déterminer la nature de la forme quadratique $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 5yz + 4z^2$.

2) Déterminer la nature de la forme quadratique $x_2^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3 + bx_3^2$ en fonction des valeurs des paramètres réels a et b.

3) Déterminer la classe de la forme quadratique $x_1^2 - x_2^2 + 7x_3^2 + x_1x_2$ si $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

4) Soit la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \\ 6 & -4 & a \end{pmatrix}$

(1) Discuter la classe de A en fonction du paramètre a

(2) Pour quelles valeurs du paramètre a la forme quadratique $Q(X) = {}^tXAX$ est-elle strictement positive, pour tous les vecteurs non nuls dont la troisième composante est égale à la somme des deux autres ? (janvier 2003)

5) Déterminer la classe des formes quadratiques suivantes sous les contraintes linéaires données :

(1) $x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ si $x_1 + x_2 = x_3$.

(2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ si $x_1 + x_3 = 0$

(3) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ si $x_1 + x_3 = x_2$

6) Pour quelles valeurs du paramètre λ la forme quadratique $x^2 + 4xy + 5y^2 - 4xz - 8yz + \lambda z^2$ est-elle strictement positive, pour tout vecteur X non nul tel que $x + 2y - z = 0$?