Qualification de Arrow - Hurwicz - Uzawa

(Exercice 5-6 du polycopié vert)

On considère le pb(P) minimiser $f(x)$ s.c. $g_i(x) \leq 0 \quad i=1,\dots,m$

On note $S = \{ x : g_i(x) \leq 0 \quad i=1,\dots,m \}$ l'ensemble des solutions réalisables.

Soit x^* réalisable, on définit $I(x^*) = \{ i : g_i(x^*) = 0 \}$ les contraintes saturées par x^*

et $J(x^*) = \{ i \in I(x^*) : g_i \text{ est concave} \}$ les contraintes saturées en x^* et concaves.

On suppose que pour $i \notin I(x^*)$ g_i est continue en x^*

pour $i \in I(x^*)$ g_i est C^1 sur $\mathbb{R}^n$

De plus on suppose que l'ensemble $F_0(x^*) = \{ y : \nabla g_i(x^*) \cdot y \leq 0 \ \forall i \in J(x^*),\ \nabla g_i(x^*) \cdot y < 0 \ \forall i \in I(x^*) \setminus J(x^*) \}$ est non vide.

On va montrer que x^* est qualifié i.e. $T(S, x^*) = F(x^*)$ où $F(x^*) = \{ y : \nabla g_i(x^*) \cdot y \leq 0 \ \forall i \in I(x^*) \}$

1) a) Soit $y \in F_0(x^*)$, $x_k = x^* + \frac{1}{k} y \quad k \geq 1$ entier

Montrer que x_k est réalisable pour k suffisamment grand

b) En déduire que $F_0(x^*) \subseteq T(S, x^*)$

2) a) Montrer que $F(x^*) \subseteq \overline{F_0}(x^*)$ où $\overline{F_0}(x^*)$ est l'adhérence de $F_0(x^*)$

b) En déduire que $T(S, x^*) = F(x^*)$

3) Exemple : on considère $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $f(x) = x_1 - x_2$

$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que x^* ne vérifie pas la qualification de Cottle

b) Montrer que x^* est qualifié et expliciter le cône tangent en x^*

c) En déduire que x^* n'est pas solution de (P)

Correction

1) a) $i \notin I(x^*)$ $\left\{ \begin{array}{l} x_k \to x^* \text{ et } g_i \text{ continue en } x^* \text{ entraînent que } g_i(x_k) \to g_i(x^*) < 0 \\ \text{donc pour } k \text{ suffisamment grand } g_i(x_k) \leq 0 \end{array} \right.$

$i \in J(x^*)$ $\left\{ \begin{array}{l} g_i \text{ concave} \Rightarrow g_i(x_k) - \underbrace{g_i(x^*)}_{0} \leq \nabla g_i(x^*) \cdot (x_k - x^*) \\ \text{on multiplie par } k \Rightarrow k\, g_i(x_k) \leq \nabla g_i(x^*) \cdot y \leq 0 \Rightarrow g_i(x_k) \leq 0 \end{array} \right.$

$i \in I(x^*) \setminus J(x^*)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Taylor} \Rightarrow g_i(x_k) - \underbrace{g_i(x^*)}_{0} = \nabla g_i(x^*) \cdot (x_k - x^*) + \|x_k - x^*\| \, \varepsilon(x_k - x^*) \\ \text{on multiplie par } k \Rightarrow k\, g_i(x_k) = \underbrace{\nabla g_i(x^*) \cdot y}_{<0} + \|y\| \, \varepsilon(x_k - x^*) \\ \text{pour } k \text{ suffisamment grand } \varepsilon(x_k - x^*) \text{ est petit} \Rightarrow k\, g_i(x_k) \leq 0 \Rightarrow g_i(x_k) \leq 0 \end{array} \right.$

b) x_k est réalisable. On pose $d_k = k$. Alors $x_k \to x^*$ et $d_k(x_k - x^*) \to y$

donc $y \in T(S, x^*)$

<u>autre dém.</u> $y \in F(x^*)$. M.q. $\exists$ une suite de points de $F_0(x)$ qui CV vers y.

$y_p = y + \frac{y_0}{p}$ $\quad y_p \to y$

et $y_p \in F_0(x)$

$\Rightarrow y \in \overline{F_0}(x)$

2) a) Montrons que tout voisinage de $y \in F(x^*)$ rencontre $F_0(x^*)$

Soit $y_0 \in F_0(x^*) \neq \emptyset$ $\qquad y_0 \neq 0 \qquad$ si $I(x^*) \neq J(x^*)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \left(y + \frac{\varepsilon}{2\|y_0\|} y_0\right) \in B(y, \varepsilon)$

$$\nabla g_i(x^*) \cdot \left(y + \frac{\varepsilon}{2\|y_0\|} y_0\right) = \underbrace{\nabla g_i(x^*) \cdot y}_{\leq 0} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2\|y_0\|} \nabla g_i(x^*) \cdot y_0}_{\substack{<0 \ \text{ si } i \in I(x^*) \setminus J(x^*) \\ \leq 0 \ \text{ si } i \in J(x^*)}}$$

b) $\overline{F_0}(x^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1) et T fermé}}}{\subseteq} T(S, x^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cours}}}{\subseteq} F(x^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a)}}}{\subseteq} \overline{F_0}(x^*)$

remarque si $I(x^*) = J(x^*)$ alors on a $F_0(x) = F(x^*)$ et donc le résultat est démontré.

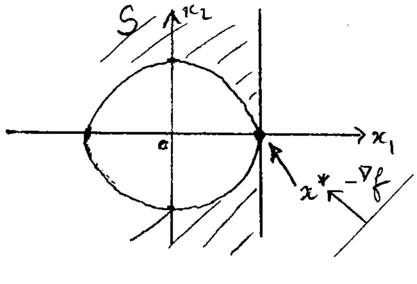
---

3) a) $I(x^*) = \{1, 2\}$ $\quad \nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F_0(x^*)$ de Cottle $= \{y : \nabla g_i(x^*) \cdot y < 0 \quad i \in I(x^*)\}$

$\qquad = \{y : -2y_1 < 0, \; y_1 < 0\} = \emptyset$

b) $J(x^*) = \{1, 2\}$ car g_1, g_2 concaves $\quad F_0(x^*) = \{y : \nabla g_i(x^*) \cdot y \leq 0 \quad i \in I(x^*)\}$

$\qquad = \{y : -2y_1 \leq 0, \; y_1 \leq 0\} = \{y : y_1 = 0\} \neq \emptyset$



donc $T(S, x^*) = \{y : y_1 = 0\}$

c) x^* est qualifié donc Kühn-Tucker sont nécessaires

$\exists d_1, d_2 \geq 0 \quad \nabla f(x^*) + d_1 \nabla g_1(x^*) + d_2 \nabla g_2(x^*) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ impossible donc x^* pas min local a fortiori pas global

Soit $S = \{x : g_i(x) \leq 0 \quad i \in I\}$ et le pb (P) $\min\limits_{x \in S} f(x)$

$S \subseteq \mathbb{R}^n$

Soit $x \in S$

1) Si x est qualifié i.e. $T(S,x) = F(x) = \{y : \nabla g_i(x) \cdot y \leq 0 \quad \forall i \in I(x)\}$

et si $\begin{cases} g_i \text{ est convexe } \forall i \in I(x) \\ g_i \text{ de classe } C^1 \end{cases}$, $\begin{cases} f \text{ est convexe} \\ f \text{ de classe } C^1 \end{cases}$

montrer que $\nabla f(x) \cdot y \geq 0 \quad \forall y \in T(S,x) \Rightarrow x$ solution optimale du pb (P)

c'est-à-dire que la condition nécessaire d'optimalité locale $\Rightarrow$ optimalité globale.

2) Exemple : soit $S = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 1 \leq 0\right\}$ et le pb (P) : $\min\limits_{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in S} f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution optimale de (P)

1) $\forall z \in S$ on a : $f(z) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (z - x)$ par convexité de f

montrons que $z - x \in T(S,x) = F(x)$ (x est qualifié)

$\forall i \in I(x) \quad \underset{\substack{\leq 0 \\ \text{car } z \in S}}{g_i(z)} - \underbrace{g_i(x)}_{=0} \geq \nabla g_i(x) \cdot (z - x)$ par convexité de g_i

et donc $0 \geq \nabla g_i(x) \cdot (z - x)$

conclusion $\nabla f(x) \cdot y \geq 0$ devient pour $y = z - x \quad \nabla f(x) \cdot (z - x) \geq 0$

et $f(z) - f(x) \geq \nabla f(x) \cdot (z - x) \geq 0$

et finalement $f(z) \geq f(x)$

2) posons $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 1$ $\quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sature cette inégalité $g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 1 - 1 = 0$

$T\left(S, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : \nabla g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y \leq 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : y_1 + y_2 \leq 0\right\}$

$\nabla g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

montrons que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est qualifié : $F_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : y_1 + y_2 < 0\right\} \neq \emptyset$ par exemple il contient $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (qualif de Cottle)

on peut utiliser Slater car g est convexe $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $g(x_0) < 0$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est qualifié et $T\left(S, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : y_1 + y_2 \leq 0\right\}$

montrons que $\nabla f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y \geq 0 \quad \forall y \in T\left(S, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\nabla f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc $\nabla f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y = -y_1 - y_2 = -(y_1 + y_2) \geq 0 \quad \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in T(S,x)$

représentation graphique du pb.

$g(x_1, x_2) = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: vecteurs propres $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

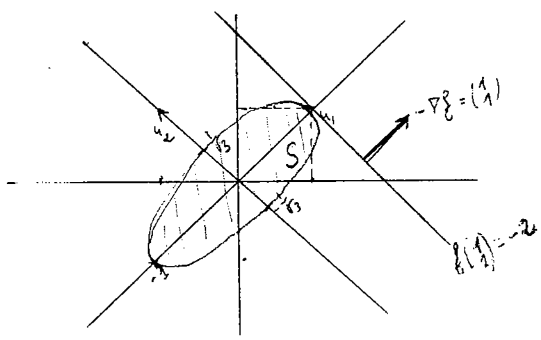
valeurs propres $1/2$ et $3/2$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^t}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

dans la base u_1, u_2 $\quad (x_1' \; x_2')\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = x_1'^2 + 3x_2'^2 \leq 1$

$x_1' = 0 \Rightarrow x_2'^2 = \frac{1}{3}$

$x_2' = 0 \Rightarrow x_1'^2 = 1$



Qualification de Arrow-Hurwicz-Uzawa

On considère le pb (P) minimiser $f(x)$ s.c. $g_i(x) \leq 0$ $i=1,\dots,m$.

On note $S = \{x : g_i(x) \leq 0 \; i=1,\dots,m\}$ l'ensemble des solutions réalisables.

Soit x^* réalisable, on définit $I(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ les indices des contraintes saturées par x^*

On suppose que (H) $\begin{cases} \text{pour } i \in I(x^*) & g_i \text{ est concave, de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n \\ \text{pour } i \notin I(x^*) & g_i \text{ est continue en } x^* \end{cases}$

On note $F(x^*) = \{y : \nabla g_i(x^*) \cdot y \leq 0 \;\; \forall i \in I(x^*)\}$

1) ~~Ceci~~ Le but de ~~l'exercice~~ cette question est de montrer que sous les hypothèses précédents (H) x^* est qualifié i.e. $T(S,x^*) = F(x^*)$ où $T(S,x^*)$ est le cône tangent à S en x^*.

a) Soit $y \in F(x^*)$, $x_k = x^* + \frac{1}{k} y$ $k \geq 1$ entier.
montrer que x_k est réalisable pour k suffisamment grand.

b) En déduire que $F(x^*) = T(S,x^*)$

2) On considère $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $f(x) = x_1 - x_2$

$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que x^* ne vérifie pas la qualification de Cottle

b) Montrer que x^* est qualifié et expliciter le cône tangent en x^*

c) En déduire que x^* n'est pas ~~solution~~ minimum local de (P)

Correction

1) a) $i \notin I(x^*)$ $\begin{cases} x_k \to x^* \text{ et } g_i \text{ continue en } x^* \Rightarrow g_i(x_k) \to g_i(x^*) < 0 \\ \text{donc pour } k \text{ suffisamment grand } g_i(x_k) \leq 0 \end{cases}$

$i \in I(x^*)$ $\begin{cases} g_i \text{ concave et } C^1 \Rightarrow g_i(x_k) - \underbrace{g_i(x^*)}_{} \leq \nabla g_i(x^*) \cdot (x_k - x^*) \\ \times k \Rightarrow k\, g_i(x_k) \leq \nabla g_i(x^*) \cdot \overset{0}{y} \leq 0 \Rightarrow g_i(x_k) \leq 0 \end{cases}$

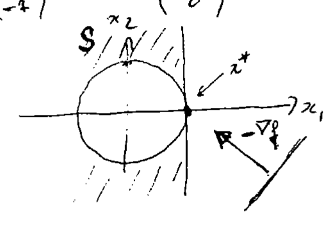
b) x_k est réalisable. On pose $d_k = k$. Alors $x_k \to x^*$ et $d_k(x_k - x^*) \to y$.
Donc $y \in T(S,x^*)$. On a donc : $\underset{\text{a)}}{F(x^*) \subseteq} T(S,x^*) \underset{\text{cours}}{\subseteq} F(x^*)$

2) a) $I(x^*) = \{1,2\}$, $\nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F_0(x^*) = \{y : \nabla g_i(x^*) \cdot y < 0 \;\; i \in I(x^*)\}$
$= \{y : -2y_1 < 0,\; y_1 < 0\} = \emptyset$

b) g_1, g_2 sont concaves et C^1 donc x^* est qualifié d'après question 1) et $T(S,x^*) = \{y : \nabla g_i(x^*) \cdot y \leq 0\}$
$= \{y : -2y_1 \leq 0, \; y_1 \leq 0\}$
$= \{y : y_1 = 0\}$

c) x^* est qualifié donc les conditions de Kuhn-Tucker sont nécessaires pour min. local.
$\exists \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ $\quad \nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ pas de solution donc x^* pas min. local a fortiori pas global.



condition nécessaire : $\nabla f(x^*) \cdot y \geq 0 \;\; \forall y \in T(S,x^*)$
or $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T(S,x^*)$ et $\nabla f(x^*) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$

Qualif. de Arrow, Hurwicz, Uzawa (suite)

on considère maintenant $\min f(x)$ s.c $x \in S = \{x : Ax \leq b\}$

1) m.q. tout $x \in S$ est qualifié
) donner $T(S,x)$ pour $x \in S$ et la condition nécessaire d'optimalité
3) m.q. si f est convexe, la condition est suffisante pour l'optimalité globale

) soit le pb $\min 2x_1 + x_2$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

m.q. $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ n'est pas minimum et que $x^{(1)}$ ~~est~~ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est minimum (global)

1) Les contraintes sont affines donc concaves et l'ens. $F_0(x) = \{y : \nabla g_i(x) \cdot y \leq 0 \quad i \in I(x)\}$ n'est jamais vide puisque $0 \in F_0(x)$

2) on note A_1 les contraintes saturées par x
A_2 ——— non saturées —

$A_1 x = b_1$
$A_2 x < b_2$
avec $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

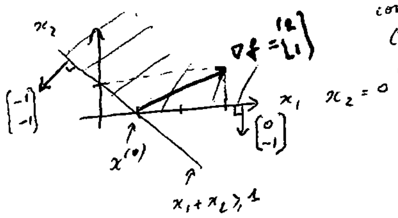
alors $T(S,x) = F(x) = \{y : \nabla g_i(x) \cdot y \leq 0 \quad i \in I(x)\} = \{y : A_1 y \leq 0\}$

condition nécessaire : $\nabla f(x) \cdot y \geq 0 \quad \forall y \in F(x) = T(S,x) = \{y : A_1 y \leq 0\}$

3) soit $z \in S$.
f convexe $\Rightarrow f(z) - f(x) \geq \nabla f(x) \cdot (z - x)$
maintenant $A_1(z - x) = \underbrace{A_1 z}_{\leq b_1} - \underbrace{A_1 x}_{= b_1} \leq b_1 - b_1 = 0$ donc $(z - x) \in F(x) = T(S,x)$

et la condition nécessaire $\Rightarrow \nabla f(x) \cdot (z - x) \geq 0 \Rightarrow f(z) - f(x) \geq 0 \Rightarrow x$ min global.

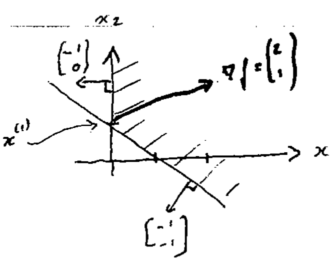
4)



cône tangent en $x^{(0)}$: $\begin{cases} -d_1 - d_2 \leq 0 \\ -d_2 \leq 0 \end{cases}$
(hachuré)
(à une translation près)

$\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} \in T(S, x^{(0)})$ $\quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$

la condition nécessaire de min (locale) n'est pas remplie.



cône tangent en $x^{(1)}$ $\begin{cases} -d_1 - d_2 \leq 0 \\ -d_1 \leq 0 \end{cases}$
(hachuré)

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 2d_1 + d_2 = \underbrace{d_1}_{\geq 0} + \underbrace{d_1 + d_2}_{\geq 0}$

f étant linéaire (donc convexe) la condition est suffisante pour pouvoir dire que $x^{(1)}$ est min. global.

Cône tangent d'un convexe

Soit C convexe de $\mathbb{R}^n$, $x \in C$.

1) m.q. $C - \{x\} \subset T(C,x)$

$\forall y \in C \quad x + \frac{1}{k}(y-x) \in C$ pour $k \geq 1$ en effet $0 \leq 1/k \leq 1$. $\quad x + \frac{1}{k}(y-x) \xrightarrow{k} x$

$k\left(x + \frac{1}{k}(y-x) - x\right) \to y - x$

On appelle cône(A) le plus petit cône ~~convexe~~ contenant $A \equiv \{x : x = \sum \alpha_i x_i \quad \alpha_i \geq 0, x_i \in A\}$
sur un nombre fini de i

2) m.q. $T(C,x) = \overline{\text{cône}(C - \{x\})}$

a) $C - \{x\} \subset T(C,x)$ d'après 1)

le cône engendré par $C - \{x\}$ est égal au cône convexe engendré par $C - \{x\}$ car $C - \{x\}$ est convexe.

$\Rightarrow \text{cône}(C - \{x\}) \subset T(C,x)$ (car $T(C,x)$ est un cône)

$\Rightarrow \overline{\text{cône}(C - \{x\})} \subset T(C,x)$ (car $T(C,x)$ est fermé)

b) soit $y \in T(C,x)$; $\exists \lambda_k \geq 0$, $\exists x_k \in C$ t.q $\lambda_k(x_k - x) \to y$

mais $\lambda_k(x_k - x) \in \text{cône}(C - \{x\})$ donc $y \in \overline{\text{cône}(C - \{x\})}$

<u>on remarquera</u> l'inclusion $T(C,x) \subseteq \overline{\text{cône}(C - \{x\})}$ est vraie $\forall C$ (pas forcément convexe)

3) En déduire que $T(C,x)$ est convexe

on a donc $T(C,x) = \overline{\text{cône}(C - \{x\})}$

$\text{cône}(C - \{x\})$ est convexe et la fermeture $\overline{\text{cône}(C - \{x\})}$ est convexe.

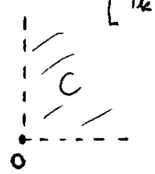
4) Soit $C = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\} \cup \{0\}$

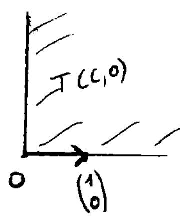
a) donner $T(C, 0)$

b) vérifier directement que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in T(C,0)$

a) $T(C,0) = \overline{\text{cône}(C - \{0\})} = \overline{\text{cône}(C)} = \overline{C}$ car $\text{cône}(C) = C$

b) soit $x_k = \begin{bmatrix}1/k\\1/k^2\end{bmatrix} \in C$, $x_k \xrightarrow{k} 0$, $\lambda_k = k$, $\lambda_k(x_k - 0) = k\begin{bmatrix}1/k\\1/k^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1/k\end{bmatrix} \xrightarrow{k} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$





Cône tangent

D cône : $\forall x \in D \Rightarrow \alpha x \in D \ \forall \alpha > 0$

Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$, on note $\text{Cône}(C)$ le plus petit cône contenant C

On a $\text{Cône}(C) = \{ \alpha x : \forall \alpha > 0, \forall x \in C \} \longrightarrow$ En effet, soit D cône contenant C, D est cône donc $\alpha x \in D$ $\forall \alpha > 0$, $x \in C$

i.e. D contient $\text{Cône}(C)$

De plus $\text{Cône}(C)$ est un cône.

A) 1) Soit $x \in C$. M.q. $T(C,x) \subseteq \overline{\text{Cône}(C - \{x\})}$

Soit $y \in T(C,x)$. $\exists \alpha_k > 0$, $\exists x_k \in C$ t.q $\alpha_k(x_k - x) \to y$

Or $\alpha_k(x_k - x) \in \text{Cône}(C - \{x\}) \Rightarrow y \in \overline{\text{Cône}(C - \{x\})}$

2) Soit $C = \{ x \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) = x_2 - x_1^3 \leq 0,\ g_2(x) = -x_2 \leq 0 \}$

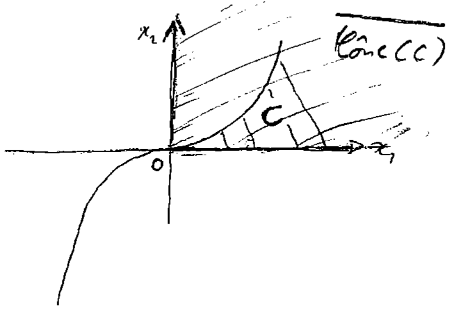
a) m.q. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \overline{\text{Cône}(C)}$

b) m.q. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin T(C,0)$

a) $u_k = \frac{1}{k^3} \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ k^3 \end{pmatrix}}_{\in C} \in \text{Cône}(C) \qquad u_k \xrightarrow{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \overline{\text{Cône}(C)}$

b) on a $T(C,0) \subseteq F(0) = \{ y : \nabla g_1(0) \cdot y \leq 0,\ \nabla g_2(0) \cdot y \leq 0 \} = \{ y : y_2 = 0 \}$

donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F(0)$



B) On considère maintenant C convexe. $x \in C$

1) m.q. $\text{Cône}(C)$ est convexe.

$y = (1-\lambda) \underset{>0}{\alpha_1} x_1 + \lambda \underset{>0}{\alpha_2} x_2$, $x_1, x_2 \in C$

$$y = \underbrace{[(1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2]}_{>0} \underbrace{\left[\frac{(1-\lambda)\alpha_1 x_1}{(1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2} + \frac{\lambda\alpha_2 x_2}{(1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2} \right]}_{\in C} \in \text{Cône}(C)$$

2) m.q. $\overline{\text{Cône}(C - \{x\})} \subseteq T(C,x)$

a) m.q. $C - \{x\} \subseteq T(C,x)$

$\forall y \in C$ $x_k = x + \frac{1}{k}(y - x) \in C$ pour $k \geq 1$ (en effet $0 \leq \frac{1}{k} \leq 1$) et $x + \frac{1}{k}(y - x) \xrightarrow{k} x$

prenons $\alpha_k = k$ $\quad k(x_k - x) = y - x \quad (\alpha_k(x_k - x) \to y - x)$

b) $\text{Cône}(C - \{x\}) \subseteq T(C,x)$ (car $T(C,x)$ cône)

$\overline{\text{Cône}(C - \{x\})} \subseteq T(C,x)$ (car $T(C,x)$ fermé)

3) En déduire que $T(C,x)$ est convexe.

$\text{Cône}(C-\{x\})$ convexe et la fermeture d'un convexe est convexe. A1 et B2 $\Rightarrow T(C,x)=\overline{\text{Cône}(C}$

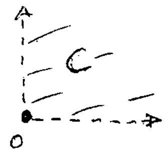
4) Soit $C=\{(x_1,x_2) : x_1>0,\ x_2>0\}\cup\{0\}$

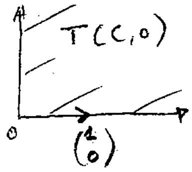
a) donner $T(C,0)$

b) vérifier directement que $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in T(C,0)$

a) $T(C,0)=\overline{\text{Cône}(C-\{0\})}=\overline{\text{Cône}(C)}=\overline{C}$ car C est un cône $\Rightarrow \text{Cône}(C)=C$

b) soit $x_k=\begin{bmatrix}1/k\\1/k^2\end{bmatrix}\in C$, $x_k\to 0$, $\lambda_k=k$, $\lambda_k(x_k-0)=k\begin{bmatrix}1/k\\1/k^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1/k\end{bmatrix}\xrightarrow{k}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$





Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexe, f de classe C^1 et convexe, $x^* \in S$.
On considère le pb. minimiser $f(x)$ s.c. $x \in S$

a) M.q. $\nabla f(x^*) \bullet y \geq 0$ pour tout $y \in S - \{x^*\}$ $\Rightarrow$ x^* est un minimum global du pb.

Soit $x \in S$. Alors $x - x^* \in S - \{x^*\}$ ce qui entraine $\nabla f(x^*) \bullet (x - x^*) \geq 0$

f convexe et C^1 $\Rightarrow$ $f(x) \geq f(x^*) + \underbrace{\nabla f(x^*) \bullet (x - x^*)}_{\geq 0} \geq f(x^*)$

b) M.q. $S - \{x^*\} \subseteq T(S, x^*)$

Soit $x \in S$

Posons $x_k = x^* + \frac{1}{k}(x - x^*)$. Alors $x_k \xrightarrow{k} x^*$ et $x_k = \underbrace{(1 - \frac{1}{k})}_{\geq 0} x^* + \frac{1}{k} x \in S$ pour $k \geq 1$

combinaison convexe de x^* et x

Posons $\lambda_k = k$. Alors $\lambda_k (x_k - x^*) \xrightarrow{k} x - x^*$

Donc $y = x - x^* \in T(S, x^*)$

c) Soit le pb : min $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ s.c. $x_1 + x_2 \geq 1$

M.q. $x^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ est optimum global.

$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Les $y \in S - \{x^*\}$ vérifient $y_1 + y_2 \geq 0$

car $x_1 + x_2 \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{x_1 - \frac{1}{2}}_{y_1} + \underbrace{x_2 - \frac{1}{2}}_{y_2} \geq 0$

f est convexe

donc $\nabla f(x^*) \bullet y = y_1 + y_2 \geq 0$ pour tout $y \in S - \{x^*\}$