Qualification - Kuhn-Tucker (Strasbourg mai 2011)

$$(P) \quad \min_x f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 4 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 & (2) \\ -x_1 \leq 0 & (3) \end{cases}$$

on note S l'ensemble des solutions réalisables de (P) i.e les $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $(1), (2), (3)$

Soit $x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

1) x^* est-il qualifié ? Donner le système d'inégalité décrivant $T(S, x^*)$

1 $I(x^*) = \{1, 2\}$ Essayons le critère de qualification de l'indépendance linéaire.

2 $\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\nabla g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ donc $\nabla g_1(x^*)$ et $\nabla g_2(x^*)$ forment une famille libre

Le critère de qualification de l'indépendance linéaire est vérifié donc x^* est qualifié.

2 donc $T(S, x^*) = F(x^*) = \{y : \nabla g_1(x^*) \cdot y \leq 0 \ , \ \nabla g_2(x^*) \cdot y \leq 0\}$

$= \{y : 4y_1 \leq 0 \ , \ y_1 + 2y_2 \leq 0\}$

2) Résoudre les conditions de Kuhn-Tucker au point x^*

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \nabla f = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2(x_2 - 2) \end{bmatrix}_* = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

2 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ solution unique $\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 2$

Les conditions de Kuhn-Tucker sont satisfaites. Elles sont ici nécessaires car x^* est qualifié.
Pour la suffisance, on sait par théorème que sous certaines conditions de convexité elles sont suffisantes pour l'optimalité globale. Les conditions de convexité sont :

f convexe ici $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ définie positive donc f convexe.

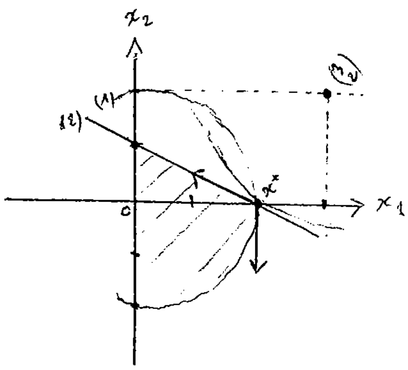
3 g_1 convexe ici $H_{g_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ " " " g_1 convexe

g_2 convexe ici $H_{g_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ semi-définie positive donc g_2 convexe (g_2 est même affine)

Les conditions de convexité sont satisfaites donc x^* min global de (P)

3) Représentation graphique.

2



les courbes de niveau de f sont des cercles de centre $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le plus petit cercle qui rencontre S est celui qui passe par x^*.

Le cône tangent est le cône de sommet x^* et dont les 2 rayons extrêmes sont représentés par les 2 vecteurs satisfaisant $y_1 = 0$, pour l'un et $y_1 + 2y_2 = 0$ pour l'autre

Conditions de Kühn-Tücker . Point selle

(P) : $\min f(x,y) = x^2 - 2y^2 + x$ s.c. $\begin{cases} -x - y \leq 0 & (1) \\ y^2 - x \leq 0 & (2) \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

on note S l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant (1) et (2)

1) Montrer que tous les points de S sont qualifiés.
2) Résoudre les conditions de Kühn. Tücker
3) Montrer que le point $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un min local strict
4) A l'aide de la dualité, montrer que $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est minimum global (i.e solution de (P))

---

1) Les gradients de (1) et (2) : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix}$

Le seul cas problématique est un point x t.q. $I(x) = \{1,2\}$ car $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix}$ ne sont pas forcément linéairement indépendants. Par exemple $2y = -1 \to y = -\frac{1}{2}$

mais alors $-x - y = 0 \Rightarrow x = -y = +\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 - x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ donc (2) pas saturée

Donc les points de S sont qualifiés et les conditions de Kühn-Tücker sont des conditions nécessaires d'optimalité

2) K.T. $\begin{cases} \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \\ \nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = 0 \\ \lambda_i g_i(x) = 0 \quad i = 1,2 \end{cases}$

cas $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$: $\nabla f = \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0, x = -\frac{1}{2} \notin S$

cas $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ $\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla g_1 \\ g_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 - \lambda_1 = 0 \\ -4y - \lambda_1 = 0 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 2 \end{cases} \in S \quad f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

cas $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ $\begin{cases} 2x + 1 - \lambda_2 = 0 \\ -4y + 2\lambda_2 y = 0 \\ y^2 = x \end{cases}$

si $y = 0 \Rightarrow x = 0, \lambda_2 = 1 \in S \quad f(0,0) = 0$

si $y \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2, x = \frac{1}{2}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S$ et $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \notin S$

cas $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $\begin{cases} 2x + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -4y - \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ y = -x, \ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow$ 2 cas : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2 + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 4 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \quad f(1,-1) = 1 - 2 + 1 = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{cases} \to \lambda_2 = 1, \lambda_1 = 0$ déjà vu.

3) pour $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, on a $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$

$F^+\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\{ y : \cancel{\nabla g_1\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \leq 0, \nabla g_2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ y : \cancel{-y_1 - y_2 \leq 0}, -y_1 + \frac{2}{\sqrt{2}} y_2 = 0 \right\}$ car $I^+(x^*) = \{2\}$

$H\mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \underset{\lambda_1}{0}, \underset{\lambda_2}{2}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est-il déf. positif sur $F^+\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$?

$y \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y = 2y_1^2 \geq 0$ pour $y \in F^+$. $2y_1^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$ sur $F^+\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Donc sur $F^+\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ s'annule uniquement pour $y_1 = 0, y_2 = 0$. Donc $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est min local strict.

4) Il suffit de montrer que $\left[\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \underset{\lambda_1}{\underset{\uparrow}{0}}, \underset{\lambda_2}{\underset{\uparrow}{2}}\right]$ est un point selle de la fonction de Lagrange.

car alors on a valeur du dual = valeur du primal (th. de cours)

<u>caractéristiques des points selles.</u>

1). $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, 0, 2\right) \overset{?}{=} \min\limits_{x,y} \mathcal{L}((x,y), 0, 2)$

$$\mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0, 2\right] = x^2 - 2y^2 + x + 2(y^2 - x) = x^2 - x$$

$H_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$ donc. $\mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0, 2\right]$ est convexe.

~~Sot~~ $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ satisfait les conditions de K.T pour $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ c'est-à-dire $\nabla \mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, 0, 2\right] = 0$

donc $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un point critique de $\mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0, 2\right]$ qui est convexe donc $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ minimiseur (global) de $\mathcal{L}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0, 2\right]$

2) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ satisfait (1) et (2)

$$g_1\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$$

$$g_2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

3) $\lambda_1 g_1\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$ car $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 g_2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$ car $g_2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$

A

OPTIMISATION MATHÉMATIQUE

Répondre obligatoirement sur cette feuille.

Durée : **45 mn**

Documents autorisés **: polycopié et notes de cours**

Calculatrices **non autorisées**

Nom :

Groupe :

Soit (P) le problème d'optimisation suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & f(x,y) = x^2 - 2y^2 + x \\ \text{Sous contraintes} & -x - y \leq 0 \\ & y^2 - x \leq 0 \\ & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right.$$

Le but de cet exercice est de résoudre (P), *i.e.* déterminer l'ensemble des points optimaux (minima globaux) de (P). On note $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x - y \leq 0 \text{ et } y^2 - x \leq 0\}$.

(1) Déterminer les points vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre (Kuhn et Tucker). Indice : on étudiera les quatre cas possibles relatifs à la saturation (ou non) des deux contraintes.

(2) Démontrer que tous les points de X sont qualifiés.

(3) Résoudre (P) en utilisant les résultats du 1.) et du 2.). Indice : on pourra montrer dans un premier temps que la fonction est positive pour $(x,y) \in X$ tel que $x > 1$, puis on justifiera l'existence d'un minimum global sur le reste du domaine X.

CORRECTION (succinte)

$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 - 2y^2 + x + \lambda_1(-x-y) + \lambda_2(y^2 - x)$

$\nabla L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -4y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix}$

<u>Cas 1</u> : $g_1(x,y) = g_2(x,y) = 0$

on a $\begin{cases} x = -y \\ y^2 = x \end{cases}$ donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

dans le premier cas $\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_2 = 0$

dans le second cas $\begin{cases} 3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 4 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$

Remarque : $f(0,0) = f(1,-1) = 0$

<u>Cas 2</u> : $g_1(x,y) < 0$ et $g_2(x,y) < 0$

Donc on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d'où $\begin{cases} 2x+1 = 0 \\ \text{-4y} = 0 \end{cases}$ donc $x = -\frac{1}{2}$ qui n'est pas admissible.

<u>Cas 3</u> : $g_1(x,y) < 0$ et $g_2(x,y) = 0$

Donc on a $\lambda_1 = 0$. D'où $\begin{cases} 2x - \lambda_2 = -1 \\ (-4 + 2\lambda_2)\, y = 0 \end{cases}$

Si $y = 0$ alors $x = 0$ (car $y^2 = x$) : cas déjà traité. Sinon $\lambda_2 = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \notin X$

Remarque : $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$

<u>Cas 4</u> : $g_1(x,y) = 0$ et $g_2(x,y) < 0$

Donc on a $\lambda_2 = 0$. D'où $\begin{cases} 2x + 1 - \lambda_1 = 0 \\ 4x - \lambda_1 = 0 \end{cases}$ car $-x = y$

D'où $x = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_1 = 2$

Remarque : $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > f(0,0) = f(1,-1) = 0.$

2.

QUALIFICATION

critère d'indépendance linéaire des gradients des contraintes saturées.

Soit $(x,y) \in X$.

$\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix}$

Seul cas potentiellement à problème : $y = -\frac{1}{2}$ avec les deux contraintes saturées, et donc $x = \frac{1}{2}$. Mais ce point ne sature pas la contrainte $y^2 \le x$.

3.

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ est un minimum global de f :

Pour $x > 1$ on a $x^2 - 2y^2 + x > 2x - 2y^2 \ge 0 > f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ car $y^2 \le x$.

f est continue et sur $X \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x - y \le 0 \text{ et } y^2 - x \le 0\, et\, x \ge 1\right\}$ compact, elle admet donc un minimum.

CORRECTION (succinte)

$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 - 2y^2 + x + \lambda_1(-x-y) + \lambda_2(y^2 - x)$

$\nabla L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -4y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2y \end{pmatrix}$

<u>Cas 1</u> : $g_1(x,y) = g_2(x,y) = 0$

on a $\begin{cases} x = -y \\ y^2 = x \end{cases}$ donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

dans le premier cas $\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_2 = 0$

dans le second cas $\begin{cases} 3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 4 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$

Remarque : $f(0,0) = f(1,-1) = 0$

<u>Cas 2</u> : $g_1(x,y) < 0$ et $g_2(x,y) < 0$

Donc on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d'où $\begin{cases} 2x+1 = 0 \\ \text{-4y} = 0 \end{cases}$ donc $x = -\frac{1}{2}$ qui n'est pas admissible.

<u>Cas 3</u> : $g_1(x,y) < 0$ et $g_2(x,y) = 0$

Donc on a $\lambda_1 = 0$. D'où $\begin{cases} 2x - \lambda_2 = -1 \\ (-4 + 2\lambda_2)\, y = 0 \end{cases}$

Si $y = 0$ alors $x = 0$ (car $y^2 = x$) : cas déjà traité. Sinon $\lambda_2 = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Remarque : $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$

<u>Cas 4</u> : $g_1(x,y) = 0$ et $g_2(x,y) < 0$

Donc on a $\lambda_2 = 0$. D'où $\begin{cases} 2x + 1 - \lambda_1 = 0 \\ 4x - \lambda_1 = 0 \end{cases}$ car $-x = y$

D'où $x = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$ et $\lambda_1 = 2$

Remarque : $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > f(0,0) = f(1,-1) = 0$.

2.

QUALIFICATION

critère d'indépendance linéaire des gradients des contraintes saturées :

$\nabla g_1(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\nabla g_2(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_1(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 0\right)$: $\nabla g_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ est un minimum global de f (à détailler : $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > f(0,0) = f(1,-1) > f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$).

Conditions suffisantes

Exercice 5-10 (photocopie du livre)

$$(P)\quad \begin{array}{l} \min\ -x_1 \\ \text{s.c.}\quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ \qquad (x_1-1)^3 - x_2 \leq 0 \end{array}$$

a) montrer que $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est qualifié.

b) montrer que $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vérifie les conditions de Kühn-Tücker (Lagrange) et que c'est bien un optimum (vérification graphique)

a) $\nabla g_1 = \begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix}$ $\qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix}3(x_1-1)^2\\-1\end{pmatrix}$

en $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$\nabla g_1(1,0)$ et $\nabla g_2(1,0)$ sont lin^t ind^t

g_1 et g_2 sont ~~satu~~ saturées en $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$x^* = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$F^+(x^*) = \{y : 2y_1 = 0,\ -y_2 \leq 0\}$

b) conditions de Lagrange :

$-1 + 2\Pi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 = \frac{1}{2} > 0$

$-\Pi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_2 = 0$

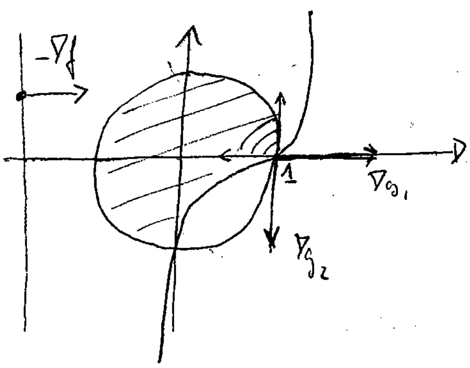
donc $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vérifie les conditions de Lagrange.

$M = \{2y_1 = 0\}$

$H_L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ définie positif sur $M \supseteq F^+(x^*)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ min local strict. C.S. 2^e ordre

vérification graphique de l'optimalité :



$T(S,\bar{x}) = \{y : y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0\}$

car $\bar{x}$ est qualifié

cet exercice illustre un cas ~~où~~ où les conditions de Lagrange sont suffisantes.
à condition que le point $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ soit le seul à vérifier les conditions de Kühn-Tücker.

C'était prévisible car on sait que (P) admet une solution (min d'une fction continue sur un compact) de plus tous les points sont qualifiés, donc l'optimum, vérifiant les conditions de Kühn-Tücker, ~~[illegible]~~ le point trouvé est l'optimum si il est le seul à vérifier les conditions.
Il faudrait voir si il n'y a pas d'autre point qui soit solution du système.

Programmation non convexe.

Conditions nécessaires.

Soit (P) : $\min f(x,y) = x+y$
s.c $xy \leq 1$ on note $S = \{(x,y) : xy \leq 1\}$

1) vérifier que tous les points du domaine sont qualifiés sauf un
2) calculer les points qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité (conditions de Lagrange)
3) vérifier que (P) n'a pas de solution.

Cet exercice illustre le caractère non suffisant des conditions de Lagrange (i.e des conditions de Kühn-Tücker dans cas non convexe)

1) $\nabla g = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ le seul cas où ∇g est lin^t dép^t (on utilise le critère "indépendance linéaire") est quand $\nabla g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0$ ~~n'est pas dans le domaine~~.

remarquons que cela n'est pas gênant pour éventuellement appliquer le théorème sur les conditions nécessaires car en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ les contraintes sont non saturées.

2) conditions lagrange : si x^* est solution de (P) (et si x^* est qualifié) alors $\exists \lambda \geq 0$ t.q.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

question 1)
g est continue $\Rightarrow g^{-1}(]-\infty, 0[)$ est ouvert donc inclu dans $\mathring{S}$
donc tout (x,y) t.q. $g(x,y) < 0$ est qualifié $T(S,(x,y)) = \mathbb{R}^n$
donc on considère seul^t (x,y) t.q $g(x,y) = 0$

$\lambda = 0$ impossible

$\lambda > 0 \to g(x) = 0$ (les contraintes saturées)

$\to xy = 1$
$(1) \to y = x = -\frac{1}{\lambda}$ $\Big| \to \frac{1}{\lambda^2} = 1 \to \lambda = 1 \to \boxed{x = y = -1}$

~~3)~~ on a un point $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est réalisable, qui vérifie les conditions de Lagrange (identiques aux conditions Kühn-Tücker dans cas convexe) et cependant, comme on va le voir, ce point n'est pas solution de (P).

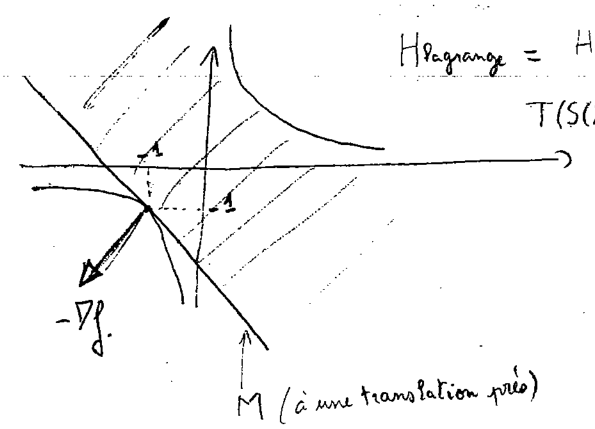
3) prendre $y = \frac{1}{x}$ alors $x+y = x + \frac{1}{x} \to -\infty$ quand $x \to -\infty$ $X^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $S(X^*) = \{(x,y) : xy = 1\}$ contrainte saturée en X^*

$H_{lagrange} = H_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $(x\ y) H_g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy$

$T(S(X^*), X^*) = M = \{-y_1 - y_2 = 0\} = \left\{\begin{matrix} y_1 \\ -y_1 \end{matrix}\right\}$

$(y_1\ -y_1) H_g \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = -2y_1^2 \leq 0$

C.N du 2^e ordre pas vérifiée.



Exercice 5-10 (suite)

c) montrer que $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un minimum global à l'aide des résultats de la dualité lagrangienne.

on montre que $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Pi_1 = \frac{1}{2}$, $\Pi_2 = 0$ est un point selle de la fonction de Lagrange.

caractéristique n°1 : $\bar{x}$ minimise $\mathcal{L}(\bar{x}, \frac{1}{2}, 0)$

en effet $\mathcal{L}(x, \frac{1}{2}, 0) = f(x) + \frac{1}{2} g_1(x) = -x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ est convexe.

Pour la minimiser, il suffit de trouver un point critique.

$$\nabla \mathcal{L}(x, \tfrac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 + x_1 \\ 0 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

caractéristique n°2 : $\bar{x}$ satisfait les contraintes de (P) $\begin{cases} g_1(\bar{x}) = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0 \leq 0 \\ g_2(\bar{x}) = (\bar{x}_1 - 1)^3 - \bar{x}_2 = 0 - 0 = 0 \leq 0 \end{cases}$

caractéristique n°3 : $\begin{cases} \frac{1}{2} \times g_1(\bar{x}) = 0 \\ 0 \times g_2(\bar{x}) = 0 \end{cases}$ conditions de complémentarité satisfaites.

Contrôle MOM (Mai 2006)

Durée= 30 minutes
Documents autorisés. Calculettes interdites.

<u>Qualification. Conditions de Kühn-Tücker.</u>

On considère le problème :

$$\min f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad s.c. \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 & (2) \\ -x_1 \leq 0 & (3) \end{cases}$$

On note S l'ensemble des solutions réalisables c'est-à-dire l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de R^2 qui vérifient (1), (2) et (3). On note $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Le point x^* est-il qualifié ?
Donner le système d'inégalités décrivant $T(S, x^*)$ le cône tangent à S au point x^* ?

2) Résoudre les conditions de Kühn-Tücker au point x^*.

3) Vérifier, en utilisant les résultats précédents, que pour tout $y \in T(S, x^*)$ on a $\nabla f(x^*) \bullet y \geq 0$.

min $(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$

s.c. $\begin{cases} x_1^2+x_2^2 \leq 5 & (1) \\ x_1+2x_2 \leq 4 & (2) \end{cases}$

On note S l'ensemble des solutions réalisables c'est-à-dire l'ensemble des points $\binom{x_1}{x_2}$ qui vérifient (1) et (2)

On note $x^*=\binom{2}{1}$

1) Le point $x^*=(2,1)$ est-il qualifié ?

Expliciter le système d'inégalités définissant le cône tangent $T(S,x^*)$ à S en (2,1)

2) Résoudre les conditions de K.T au point $x^*(2,1)$

3) ~~Mq~~, (en utilisant le résultat ~~question~~ de la question 2), que pour tout $y \in T(S,x^*_{(2,1)})$, on a $\nabla f(\overset{x^*}{x_1,x_2}) \cdot y \geq 0$

Vérifier ~~que~~

1) (1) $\to 4+1 = 5$ $\quad I(x^*)=\{1,2\}$

(2) $\to 2+2=4$

$\nabla g_1(x^*)=\begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\quad \nabla g_2(x^*)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ sont. lin. indt $\to$ qualif de l'ind. linéaire.

$\Rightarrow T(S,x^*)=\{y : 4y_1+2y_2 \leq 0 \ , \ y_1+2y_2 \leq 0\}$

2) $\nabla f(x^*)=\begin{bmatrix}2(x_1-3)\\2(x_2-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=0 \to$

$-2+4\lambda_1+\lambda_2=0$
$-4+4\lambda_1+4\lambda_2=0$ $\to 2-3\lambda_2=0 \to \lambda_2=\frac{2}{3}$
$-2+4\lambda_1+\frac{2}{3}=0 \to \lambda_1=\left(2-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\left(\frac{6-2}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

$\begin{cases} -2+4/3+2/3=0 \\ -2+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=0 \end{cases}$ ok.

3) on a ~~$\nabla f(x^*)+\frac{1}{3}$~~ $\nabla f(x^*)+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=0$

en multipliant par $y \in T(S,x^*)$

$\nabla f(x^*)\cdot y+\frac{1}{3}\underbrace{(4y_1+2y_2)}_{\leq 0}+\frac{2}{3}\underbrace{(y_1+2y_2)}_{\leq 0}=0 \to \nabla f(x^*)\cdot y \geq 0$.

4) m.q. $\binom{2}{1}$, $\lambda_1=\frac{1}{3}$, $\lambda_2=\frac{2}{3}$ est un point selle et en déduire l'optimum global de (P).

$\mathcal{L}=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2+\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2-5)+\frac{2}{3}(x_1+2x_2-4)$ convexe.

$\nabla\mathcal{L}=\begin{cases}2(x_1-3)+\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}=0\\2(x_2-2)+\frac{2}{3}x_2+\frac{4}{3}=0\end{cases}$ satisfait par $\binom{2}{1}$ donc $\binom{2}{1}$ minimise $\mathcal{L}(x,\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ caract. n° 1

caract n° 2 et 3 satisfaites car $\binom{2}{1}$ sature (1) et (2)

Contrôle MOM (Mai 2006)

Durée= 30 minutes
Documents autorisés. Calculettes interdites.

<u>Qualification. Conditions de Kühn-Tücker.</u>

On considère le problème :

$$\min f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad s.c. \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 & (2) \\ -x_1 \leq 0 & (3) \end{cases}$$

On note S l'ensemble des solutions réalisables c'est-à-dire l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de R^2 qui vérifient (1), (2) et (3). On note $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Le point x^* est-il qualifié ?
Donner le système d'inégalités décrivant $T(S, x^*)$ le cône tangent à S au point x^* ?

2) Résoudre les conditions de Kühn-Tücker au point x^*.

3) Vérifier, en utilisant les résultats précédents, que pour tout $y \in T(S, x^*)$ on a $\nabla f(x^*) \bullet y \geq 0$.

$\min \quad (x_1 - 3) + (x_2 - 2)$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 \leq 11 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

soit $x^* = (3\ 1)$

1) x^* est-il qualifié ? Expliciter $T(S,x^*)$

2) x^* vérifie-t-il les conditions de K.T ?

3) Existe-t-il un y de $T(S,x^*)$ t.q. $Df(x^*)\cdot y < 0$
Si oui, l'exhiber.

) a) $x_1^2 + 2x_2^2 = 11$

$x_1 = 4 - x_2$ $\qquad x_2 = 1 \qquad x_1 = 3$

$(4-x_2)^2 + 2x_2^2 = \cancel{11}$

$9 + 2 = 11$

$x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Df = \begin{matrix} 2(x_1 - 3) \\ 2(x_2 - 2) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad I(x^*) = \{1, 2\}$

$Dg_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad Dg_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ lin^t. ind^t $\to$ qualifié

b) $T(S,x^*) = \{ y : 6y_1 + 4y_2 \leq 0,\ y_1 + y_2 \leq 0 \} = F(x^*)$

2) $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ $\qquad \begin{matrix} 6\lambda_1 - 4\lambda_1 + 2 = 0 \to \lambda_1 = -1 \\ -2 + \lambda_1 4 + \lambda_2 = 0 \to \lambda_2 = +6 \end{matrix}$

le point ne vérifie pas K.T. $\Rightarrow$ il existe un $y \in T(S, x^*) = F(x^*)$ t.q. $Df(x^*)\cdot y < 0$

3) $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{y} = -2 < 0$

Contrôle MOM (Mai 2006)

Durée= 30 minutes
Documents autorisés. Calculettes interdites.

Qualification. Conditions de Kühn-Tücker.

On considère le problème :

$$\min f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad s.c. \quad \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 \le 11 & (1) \\ x_1 + x_2 \le 4 & (2) \\ -x_2 \le 0 & (3) \end{cases}$$

On note S l'ensemble des solutions réalisables c'est-à-dire l'ensemble des points $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de R^2 qui vérifient (1), (2) et (3). On note $x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Le point x^* est-il qualifié ?
Donner le système d'inégalités décrivant $T(S, x^*)$ le cône tangent à S au point x^* ?

2) Le point x^* vérifie-t-il les conditions de Kühn-Tücker ?

3) Vérifier, en utilisant les résultats précédents, qu'il existe un $y \in T(S, x^*)$ (y que l'on exhibera) t.q. $\nabla f(x^*) \bullet y < 0$.

Problème n°2 : Conditions d'optimalité du premier et du deuxième ordre

Soit le problème suivant :

$$\min f(x) = 5x_1 - 9x_2 + 22x_3 + 10x_1^2 + 17x_2^2 + 8x_3^2 + 7x_4^2 + 13x_5^2 - 25x_1x_2 - 8x_2x_3 - 14x_1x_3 - 10x_3x_5 - 15x_4x_5$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ -x_3 \le 0 \\ -x_4 \le 0 \\ -x_5 \le 0 \\ x_1 \le 1 \\ x_2 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le 1 \\ x_5 \le 1 \end{cases}$$

1) Après avoir bien noté quelles sont les contraintes saturées, montrer que le point x de coordonnées $x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = x_5 = 1$ ne satisfait pas les conditions de Kuhn-Tucker. Calculer $f(x)$.

2) Après avoir bien noté quelles sont les contraintes saturées, montrer que le point x de coordonnées $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = x_5 = 0$ satisfait les conditions de Kuhn-Tucker.

3) a) Montrer que sous les conditions $\begin{cases} y_1 \le 0 \\ y_2 \le 0 \\ y_3 \ge 0 \\ y_4 \ge 0 \\ y_5 \ge 0 \end{cases}$, on a l'inégalité suivante :

$$10y_1^2 + 17y_2^2 + 8y_3^2 + 7y_4^2 + 13y_5^2 - 25y_1y_2 - 8y_2y_3 - 14y_1y_3 - 10y_3y_5 - 15y_4y_5 \ge$$
$$10y_1^2 + 17y_2^2 + 8y_3^2 + 7y_4^2 + 13y_5^2 - 25y_1y_2 - 10y_3y_5 - 15y_4y_5$$

b) Montrer que

$10y_1^2 + 17y_2^2 + 8y_3^2 + 7y_4^2 + 13y_5^2 - 25y_1y_2 - 10y_3y_5 - 15y_4y_5 \ge 0$ et que l'inégalité est stricte pour $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pour cela on montrera que pour les formes quadratiques suivantes on a : $10y_1^2 + 17y_2^2 - 25y_1y_2 > 0$ lorsque $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $8y_3^2 + 7y_4^2 + 13y_5^2 - 10y_3y_5 - 15y_4y_5 > 0$ lorsque $\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en étudiant les mineurs principaux des matrices symétriques associées à ces deux formes quadratiques.

c) En déduire, en utilisant un théorème du cours, que le point x de la question 2) est un minimum local strict du problème. Calculer $f(x)$.

1) K.T pour le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 1$

$$\underbrace{\begin{array}{l} 5 + 20x_1 - 25x_2 - 14x_3 \\ -9 + 34x_2 - 25x_1 - 8x_3 \\ 22 + 16x_3 - 8x_2 - 14x_1 - 10x_5 \\ 14x_4 - 15x_5 \\ 26x_5 - 15x_4 - 10x_3 \end{array}}_{\nabla f}$$

$$\underbrace{-x_1 \le 0 ,\ -x_2 \le 0 ,\ -x_3 \le 0 ,\ x_4 \le 1 ,\ x_5 \le 1}_{\text{contraintes saturées.}}$$

1

au point x cela donne :

$5 \quad -\lambda_1 = 0 \to \lambda_1 = 5$

$-9 \quad -\lambda_2 = 0 \to \lambda_2 = -9$ → pb car <0

3 $\quad 22 - 10 \quad -\lambda_3 = 0 \to \lambda_3 = 12$

$14 - 15 \quad +\lambda_4 = 0 \to \lambda_4 = 1$

$26 - 15 \quad +\lambda_5 = 0 \to \lambda_5 = -11$ → pb car <0

$f(x) = 5$

2) K.T pour le point $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$

$$\underbrace{x_1 \le 1 ,\ x_2 \le 1 ,\ -x_3 \le 0 ,\ -x_4 \le 0 ,\ -x_5 \le 0}_{\text{contraintes saturées}}$$

1

$5 + 20 - 25 \quad +\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$-9 + 34 - 25 \quad +\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

3 $\quad 22 - 8 - 14 \quad -\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

$0 \quad -\lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_4 = 0$

$0 \quad -\lambda_5 = 0 \Rightarrow \lambda_5 = 0$

donc K.T satisfait - tous les λ_i sont positifs ou nuls

3) $F^+(x) = \{ y : y_1 \le 0 ,\ y_2 \le 0 ,\ -y_3 \le 0 ,\ -y_4 \le 0 ,\ -y_5 \le 0 \}$ ici $I^+(x) = \emptyset$ 1

a) sous ces conditions $y_2 y_3 \le 0 \Rightarrow -8 y_2 y_3 \ge 0$ 1

$y_1 y_3 \le 0 \Rightarrow -14 y_1 y_3 \ge 0$

b) étudions le signe de : $10y_1^2 + 17y_2^2 - 25y_1y_2$ matrice associée $= \begin{bmatrix} 10 & -12,5 \\ -12,5 & 17 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 10 > 0$

$\Delta_2 = 10 \times 17 - 12,5 \times 12,5 > 170 - 13 \times 13 = 170 - 169 = 1$

donc matrice définie-positive.

2

$8y_3^2 + 7y_4^2 + 13y_5^2 - 10y_3y_5 - 15y_4y_5$ matrice $= \begin{bmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & -7,5 \\ -5 & -7,5 & 13 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 8 > 0$, $\Delta_2 = 56 > 0$

$\Delta_3 = 8 \times (7 \times 13 - 7,5 \times 7,5) - 5 \times (7 \times 5) > 8 \times (91 - 8 \times 8) - 25 \times 7$

$\to = 8 \times 27 - 175 = 216 - 175 = 41 > 0$

donc matrice définie-positive.

donc $\overbrace{10y_1^2 + 17y_2^2 - 25y_1y_2}^{A} + \overbrace{8y_3^2 + 7y_4^2 + 13y_5^2 - 10y_3y_5 - 15y_4y_5}^{B} \ge 0$

1 $\quad$ et pour $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \ne 0$ on a soit $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \ne 0$ ou $\begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \ne 0$ et au moins un des 2 termes est > 0 (strictement)

conclusion : $A + B - 8y_2y_3 - 14y_1y_3 \ge 0$ et > 0 pour $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \ne 0$ sur l'ensemble $F^+(x)$

c) et la quantité étudiée correspond à $\frac{1}{2}\, y \cdot H_{\mathcal{L}}\, y$ où $H_{\mathcal{L}}$ est le hessien de la fonction de Lagrange.

1 $\quad$ donc $y \cdot H_{\mathcal{L}}\, y > 0$ pour $y \ne 0 \in F^+(x)$ → par th. x est un minimum local strict. $f(x) = -2$

$\min f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ s.c. $h_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + \dfrac{x_3^2}{9} - 1 = 0$

1) condition K.T. (nécessaires car tous les points vérifiant la contrainte sont qualifiés $\nabla h_1(x) \neq 0$)

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 2x_1 = 0 \\ 2x_2 + \lambda_1 \frac{2}{4} x_2 = 0 \\ 2x_3 + \lambda_1 \frac{2}{9} x_3 = 0 \\ h_1(x_1,x_2,x_3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_1(1+\lambda_1) = 0 \\ x_2\left(1 + \frac{\lambda_1}{4}\right) = 0 \\ x_3\left(1+\frac{\lambda_1}{9}\right) = 0 \end{matrix} \xrightarrow[(2\times 3 \text{ solutions})]{3 \text{ cas}}$$

$x_1 \neq 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 \rightarrow x_2 = x_3 = 0 \rightarrow x_1 = \pm 1$

$x_2 \neq 0 \rightarrow \lambda_1 = -4 \rightarrow x_1 = x_3 = 0 \rightarrow x_2 = \pm 2$

$x_3 \neq 0 \rightarrow \lambda_1 = -9 \rightarrow x_1 = x_2 = 0 \rightarrow x_3 = \pm 3$

2) conditions au 2è ordre

$F(x) = \{ y : \nabla h_1(x) \cdot y = 0 \}$ $\qquad H_{\mathcal{L}}(x,\lambda_1) \geq 0$ sur $F(x)$ $\rightarrow$ condition néc.

$\qquad > 0 \rightarrow$ condition suff. pour min. local (strict)

solution n° 1

$F(x_+^{(1)}) = \{ y : y_1 = 0 \}$

$F(x_-^{(1)}) = \{ y : -y_1 = 0 \}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 16/9 \end{bmatrix} > 0 \text{ sur } F(x_+^{(1)}) = F(x_-^{(1)})$$

$\rightarrow$ min local strict. $x_+^{(1)}$ et $x_-^{(1)}$

solution n° 2

$F(x_+^{(2)}) = \{ y : y_2 = 0 \}$

$F(x_-^{(2)}) = \{ y : -y_2 = 0 \}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10/9 \end{bmatrix} \not\geq 0 \text{ sur } F(x_+^{(2)}) = F(x_-^{(2)})$$

$\rightarrow$ pas min.

solution n° 3

$F(x_+^{(3)}) = \{ y : y_3 = 0 \}$

$F(x_-^{(3)}) = \{ y : -y_3 = 0 \}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - 9 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \not\geq 0 \text{ sur } F(x_+^{(3)}) = F(x_-^{(3)})$$

$\rightarrow$ pas min.

---

même pb en inégalité : $\min f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ s.c. $g_1(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - \dfrac{x_2^2}{4} - \dfrac{x_3^2}{9} + 1 \leq 0$

tous les points sont qualifiés car $g_1(x) = 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $x \neq 0 \Rightarrow \nabla g_1(x) \neq 0$ donc lin^t ind^t et donc K.T sont nécessaires.

1) conditions K.T.

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 2x_1 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 \frac{x_2}{2} = 0 \\ 2x_3 - \lambda_1 \frac{2}{9} x_3 = 0 \\ \lambda_1 \times g_1(x) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \text{ et } g_1(x) \leq 0 \end{cases}$$

cas $\lambda_1 = 0 \xrightarrow{K.T} \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$ mais $g_1(x) > 0$ $\qquad$ impossible

cas $\lambda_1 > 0 \Rightarrow g_1(x) = 0$

$K.T \rightarrow \begin{cases} x_1(1-\lambda_1) = 0 \\ x_2\left(2 - \frac{\lambda_1}{2}\right) = 0 \\ x_3\left(1 - \frac{\lambda_1}{9}\right) = 0 \end{cases}$

si $x_1 \neq 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \rightarrow x_2 = x_3 = 0 \xrightarrow{g(x)=0} x_1 = \pm 1$

si $x_2 \neq 0 \rightarrow \lambda_1 = 4 \rightarrow x_1 = x_3 = 0 \rightarrow x_2 = \pm 2$

si $x_3 \neq 0 \rightarrow \lambda_1 = 9 \rightarrow x_1 = x_2 = 0 \rightarrow x_3 = \pm 3$

2) conditions du 2è ordre

dans chacun des 3 cas, $\nabla g_1(x) \neq 0 \rightarrow$ qualif. indépendance linéaire $\rightarrow T(S^+(x),x) = F^+(x) = \{ y : \nabla g_1(x) \cdot y = 0 \}$ car $I^+(x) = \{1\}$ $\quad \lambda_1 > 0$ dans les 3 cas.

cas $x_1 \neq 0$

$x = (\pm 1, 0, 0)$ $\quad F^+(x) = \{ y : y_1 = 0 \}$ $\quad H_{\mathcal{L}}(x,\lambda_1) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \frac{3}{2} & \\ & & \frac{16}{9} \end{bmatrix} > 0$ sur $F^+(x) \Rightarrow$ min. local strict pour x

cas $x_2 \neq 0$

$x = (0, \pm 2, 0)$ $\quad F^+(x) = \{ y : y_2 = 0 \}$ $\quad H_{\mathcal{L}}(x,\lambda_1) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & & \\ & 0 & \\ & & \frac{10}{9} \end{bmatrix} \not\geq 0$ sur $F^+(x) = T(S^+(x),x)$ (par ex : $y = (1,0,0)$) donc pas min. local

C.N. pas vérifiée

cas $x_3 \neq 0$

$x = (0, 0, \pm 3)$ $\quad F^+(x) = \{ y : y_3 = 0 \}$ $\quad H_{\mathcal{L}}(x,\lambda_1) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \not\geq 0$ sur $F^+(x) = T(S^+(x),x)$ (par ex : $y = (1,0,0)$) donc pas min. local

C.N. 2è ordre pas vérifiée

3) conclusion

comme le pb admet un min, il est forcément parmi les min. locaux, donc $x = (\pm 1, 0, 0)$ sont les 2 solutions du pb (minima globaux)

en effet, on a trouvé un min local en $x = (\pm 1, 0, 0) \Rightarrow f(x) \leq f(\pm 1, 0, 0) = 1$

donc on peut rajouter au pb la contrainte : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$, sans modifier le pb pour autant.

on minimise alors sur un compact et comme f est continue le pb admet une solution (th. du minimum)

autre façon avec dualité lagrangienne

montrer que $x^* = (\pm 1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 1$ est un point selle de $\mathcal{L}(x, \lambda_1)$.

1) $\mathcal{L}(x^*, 1) = \min\limits_x \mathcal{L}(x, 1)$ car $\mathcal{L}(x,1)$ est convexe

2) x^* satisfait la contrainte

3) $\lambda_1 g_1(x^*) = 0$

Optimisation mathématique

Répondre obligatoirement sur cette feuille.
Durée : **30mn**
Documents autorisés : **Aucun**
Calculatrices **interdites**

Nom :
Groupe :

Soit le problème à résoudre :

$$(P)\begin{cases} \text{Minimiser} & y^2+y \\ \text{Sous contraintes} & y^2-x^2\leq 1 \\ & y^2+x^2\leq 3 \\ & y+2x\geq -1 \end{cases}$$

(1) Montrer que $x_0=(1,-\sqrt{2})$ est qualifié et donner l'expression du cône tangent en x_0 en $S(x_0)$.
(2) Montrer que x_0 ne vérifie pas les conditions de K.T.
(3) Montrer que x_0 n'est pas un minimum local en utilisant un vecteur particulier du cône tangent (on n'utilisera pas les conditions du deuxième ordre).

Optimisation mathématique (Sept. 04)

Durée: 2 heures. Tout document autorisé. Sans calculatrices.

Exercice 1

Optimisation sans contraintes. Méthodes itératives.

On considère le problème:

$$\min \quad f(x,y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2$$

On propose deux méthodes pour résoudre ce problème: la méthode de plus forte pente (méthode de Cauchy) et la méthode du gradient conjugué.

1) Quelle méthode choisiriez-vous pour être sûr de trouver le minimum en deux itérations (quelque soit le point initial) ?
2) Appliquer la méthode choisie à la question précédente, en partant du point $(x,y) = (2,3)$.

Exercice 2

Problèmes sous contraintes. Conditions d'optimalité.

Soit le problème:

$$\min \quad f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ s.c. } h_1(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + \tfrac{1}{4}x_2^2 + \tfrac{1}{9}x_3^2 - 1 = 0$$

1) Ecrire puis résoudre les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre (Kuhn et Tucker).
2) Pour chacune des solutions trouvées précédemment, appliquer les conditions nécessaires d'optimalité du deuxième ordre pour éliminer les solutions qui ne peuvent être optimales. Montrer à l'aide de la condition suffisante d'optimalité du deuxième ordre, que la solution restante est un minimum local.

Exercice 3

Solution de norme minimum d'un système linéaire indéterminé.

On considère le problème suivant:

trouver le point x de R^n, de norme (euclidienne) minimum et vérifiant le système indéterminé $Ax = b$, où A est une matrice de p lignes linéairement indépendantes et de n colonnes, avec $p \leq n$, b un vecteur colonne de p lignes.
Le problème s'écrit donc:

$$\min \|x\|^2 \text{ s.c. } Ax = b$$

1) Ecrire les conditions de Kuhn et Tucker de ce problème (de façon matricielle i.e. sans utiliser d'indices).
2) A partir des conditions de Kuhn et Tucker, donner la formule donnant la solution du problème.

Pour cela, on admettra que AA^t est inversible.

3) Application numérique. En appliquant la formule précédente, trouver le point de R^3 de norme minimum et vérifiant le système:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

Solution de norme min. d'un système linéaire indéterminé.

$\min \|x\|^2$ s.c. $Ax = b$ $\qquad$ A matrice $\begin{cases} p \text{ lignes supposées ind}^{t} \\ n \text{ colonnes} \end{cases}$ et x vecteur colonne de n lignes

b vecteur colonne de p lignes.

1) condition K.T.

$$\begin{cases} 2x + A^t \lambda = 0 \\ Ax = b \end{cases}$$

λ vecteur colonne de p lignes.

2) Résolution (on ~~[illegible]~~ admettra AA^t inversible)

On élimine d'abord λ en multipliant la 1re équation par A :

$$2\underbrace{Ax}_{b} + AA^t \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2(AA^t)^{-1} b$$

Ensuite, on en déduit x :

$$2x + A^t\left(-2(AA^t)^{-1} b\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x = A^t (AA^t)^{-1} b$$

3) A.N. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad AA^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (AA^t)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(AA^t)^{-1} \underbrace{b}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Soit le pb : minimiser $f(x) = -x_1^2 + 2x_1 + x_2 - 1$ s.c.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 & \longrightarrow & -x_1 - x_2 - 1 \leq 0 & (n°1) \\ x_1 - x_2 \leq 2 & \longrightarrow & x_1 - x_2 - 2 \leq 0 & (n°2) \\ x_1 \geq 0 & \longrightarrow & -x_1 \leq 0 & (n°3) \\ x_2 \geq 0 & \longrightarrow & -x_2 \leq 0 & (n°4) \end{cases}$$

1) On considère les points réalisables $x' = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ et $x'' = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

a) Les points sont-ils qualifiés ?

b) Les points satisfont-ils les conditions de Kuhn-Tucker ?

c) Le point x' satisfait-il les conditions nécessaires du 2ᵉ ordre ? les conditions suffisantes du 2ᵉ ordre ?

d) Montrer que x' n'est pas un minimum local.
Vérifier

2) On s'intéresse aux solutions réalisables vérifiant l'équation $x_2 = x_1 - 2$ i.e la contrainte n°2 avec égalité.
Quelle est la valeur minimale de f dans ce cas ? Que peut-on en conclure ?

---

a) On vérifie conditions de Slater (mais la qualif. de l'indépendance linéaire fonctionne aussi)

$I(x') = \{1, 4\}$, g_1 et g_4 convexes, $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ les satisfait strict^t négative

$I(x'') = \{2, 4\}$, g_2 et g_4 convexes, $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ les satisfait strict^t négative

b) K.T pour x' : $\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{\nabla f(x')} + \lambda_1 \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}}_{\nabla g_1(x')} + \lambda_4 \underbrace{\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}}_{\nabla g_4(x')} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to \begin{cases}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 = 1\end{cases}$ donc satisfaites.

K.T pour x'' : $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to \begin{cases}\lambda_2 = 2 \\ \lambda_4 = -1\end{cases}$ donc non satisfaites.

c) CN 2ᵉ ordre $H_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ doit être semi-déf. positive sur le cône tangent de $\begin{cases}x_1 + x_2 \overset{\geq}{=} 1 \\ x_2 = 0\end{cases}$ $\begin{matrix}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_4 > 0\end{matrix}$ $S^+(x')$

l'indépendance lin. de ∇g_1 et ∇g_4 étant assurée, le cône tangent est $\begin{cases} y_1 + y_2 \overset{\geq}{=} 0 \\ y_2 = 0\end{cases}$ i.e. $\begin{bmatrix}\overset{y_1 \geq 0}{0}\\0\end{bmatrix}$ $T(S^+(x'), x') = F^+(x')$

$yH_{\mathcal{L}}y = -2y_1 \leq 0$ pour $y_1 \geq 0$ donc x' pas min. local

(c'est bien normal la surface était réduite à un unique point).
et la condition est vérifiée.

inutile

CS 2ᵉ ordre : si $H_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ est déf. positive sur $\begin{cases}-y_1 - y_2 \leq 0 \\ -y_2 \neq 0\end{cases}$ i.e. sur $\begin{cases}y_1 \geq 0 \\ y_2 = 0\end{cases}$

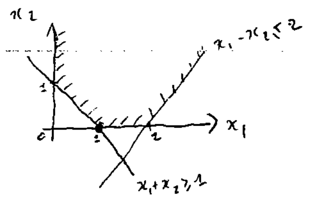
$\nabla g_1(x') \cdot y \leq 0$

$\nabla g_4(x') \cdot y = 0$

alors x' est min local strict.

mais ce n'est pas vérifié.

d)



effectuons un déplacement de la forme $x' + \begin{bmatrix}\varepsilon\\0\end{bmatrix}$ avec $\varepsilon > 0$ donc réalisable

$f = -(1+\varepsilon)^2 + 2(1+\varepsilon) - 1 = -\varepsilon^2$

on voit que f décroît

2) on se restreint à $x_2 = x_1 - 2$. La seule contrainte restante est $x_1 \geq 2$ (voir graphique)

le pb devient minimiser $-x_1^2 + 3x_1 - 3$ avec $x_1 \geq 2$

qui n'admet pas de solution (faire tendre $x_1 \mapsto +\infty$)

donc le pb initial n'admet pas de solution.

A

OPTIMISATION MATHÉMATIQUE

Répondre obligatoirement sur cette feuille.
Durée : **30mn**
Documents autorisés : **Aucun**
Calculatrices **interdites**

Nom :
Groupe :

On considère le problème :

$$(P)\begin{cases} \text{Minimiser} & f(x,y) = y^2 + y \\ \text{Sous contraintes} & y^2 - x^2 \leq 1 \qquad (1) \\ & y^2 + x^2 \leq 3 \qquad (2) \\ & y + 2x \geq -1 \qquad (3) \end{cases}$$

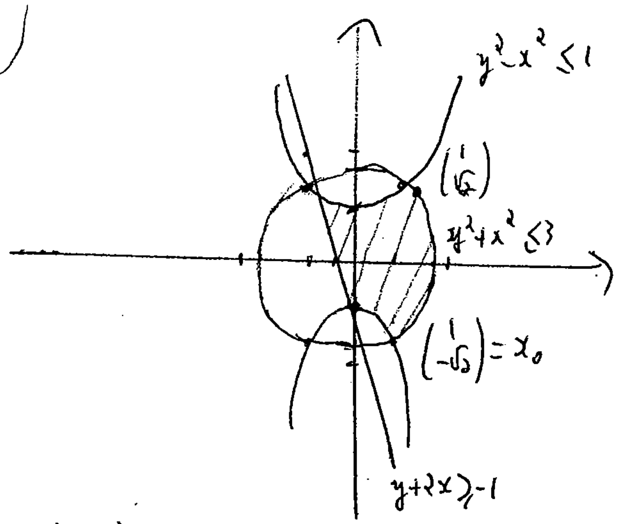
On note S l'ensemble des solutions réalisables, i.e. l'ensemble des points de $\Re^2$ qui vérifient (1), (2) et (3).

(1) Le point $x_0 = (1, -\sqrt{2})$ est-il qualifié ? Donner l'expression du cône tangent $T(S, x_0)$ en x_0.

(2) Le point x_0 vérifie-t-il les conditions de Kühn-Tücker ?

(3) Montrer que x_0 n'est pas un minimum local en utilisant un vecteur particulier du cône tangent (on n'utilisera pas les conditions du deuxième ordre mais uniquement $\nabla f(x_0)$).

F.K → A.t.



$g_1(x) = y^2 - x^2 - 1.$

$g_2(x) = y^2 + x^2 - 3$

$g_3(x) = -y - 2x + 1$

$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$I(x_0) = \{1, 2\}. \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\nabla g_1(x_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y+1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$

→ <u>qualification</u> ok : indpt lin grad.

<u>K-T.</u> : $\exists ?\ \lambda \geq 0$ tq : $\begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2}+1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$

$-2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$

$-1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1 = 2\lambda_2 = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} < 0\ !$

$F(x_0) = \{ y : -y_1 - \sqrt{2}\, y_2 \leq 0 ;\ y_1 - \sqrt{2}\, y_2 \leq 0 \}$

Soit $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a $y_0 \in F(x_0) = T(x_0, S(x_0))$

et : $\nabla f(x_0)^T y_0 = (-2\sqrt{2} - 1) \times 1 < 0\ !$

Conditions d'optimalité sous contrainte

Soit le pb : minimiser $-x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ s.c. $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

a) déterminer et résoudre les conditions de K.T.

b) vérifier les conditions du 2^e ordre. En déduire que le point trouvé en a) est un minimum local strict.

a) conditions de K.T.

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 + \lambda = 0 \\ -x_1 - x_3 + \lambda = 0 \\ -x_1 - x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

(les trois premières) $\Rightarrow -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

$(1) - (2) + (3) \Rightarrow -\cancel{2}x_2 = -\lambda \Rightarrow x_2 = 1$

idem $x_1 = x_3 = 1$

b) conditions du second ordre en $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ $\lambda = 2$.

le hessien est en fait constant, et ind^t de λ

$$H_{lagrange} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

H est indéfini sur $\mathbb{R}^3$: $y H_\ell y = -2\left[y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3\right]$ par ex $(1\,1\,0) \to -2$, $(-1\,1\,0) \to +2$

$$-\left[2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3\right] = -\left[(y_1+y_2+y_3)^2 - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\right]$$

espace tangent $M = \{y : y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$ sur M $y H_\ell y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 > 0$ ssi $(y_1, y_2, y_3) \neq (0,0,0)$

donc H_ℓ est défini positif sur M.

donc $(1,1,1)$ est min. local strict. En fait (cf. exercice 13 p. 321 Luenberger) c'est un minimum global.

technique de la base de M

base de M $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ déf $> 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ déf. positif sur M

Optimalité sous contraintes

Déterminer les dimensions d'une boîte parallélépipédique de volume maximum et de surface égale à $c > 0$.

maximiser xyz

s.c $xy + yz + xz = \frac{c}{2}$

__conditions du 1er ordre :__ $yz + \lambda(y+z) = 0$ (1) $+$ $xy + yz + xz = \frac{c}{2}$ (4)

$xz + \lambda(x+z) = 0$ (2)

$xy + \lambda(x+y) = 0$ (3)

__résolution :__ $\lambda \neq 0$ simon $yz = 0$, $xz = 0$, $xy = 0$ impossible en raison de (4)

$x \neq 0$ simon $z = y = 0$ impossible en raison de (4)

de même $y \neq 0$ et $z \neq 0$.

on multiplie (1) par x et (2) par y et on soustrait $\Rightarrow x - y = 0$

(1) par x et (3) par z " $\Rightarrow x - z = 0$

(2) par y et (3) par z " $\Rightarrow y - z = 0$

$\Big\}$ $x = y = z$

(4) $\Rightarrow x = y = z = \sqrt{\frac{c}{6}}$ (la boîte est un cube) on remarque que les contraintes $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ que l'on a laissé de côté sont vérifiées.

__vérifions les conditions du 2è ordre :__

$$(1) \Rightarrow \lambda \, 2\sqrt{\frac{c}{6}} = -\left(\frac{c}{6}\right) \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{6}}$$

$$H_\ell = \begin{bmatrix} 0 & y & z \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla h = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix} = 2\sqrt{\frac{c}{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \left\{ (y_1; y_2, y_3) : 2\sqrt{\frac{c}{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{ (y_1, y_2, y_3) : y_1 + y_2 + y_3 = 0 \}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{6}}} \quad y H_\ell y = 2y_2y_3 + 2y_1y_3 + 2y_1y_2 = \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)^2}_{0 \text{ sur } M} - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) < 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

H_ℓ est déf. < 0 sur M $\Rightarrow$ maximum local strict.

technique de la base de M

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 > 0$ déf. négative

Optimalité dans le cas quadratique et contraintes affines

Soit le pb : minimiser $\frac{1}{2} x \cdot Qx - b \cdot x$ sous contraintes $Ax = c$ (A rang m)

où Q symétrique seulement (pas d'hypothèse de convexité de f i.e Q semi déf. positive)

Mq. x^* est un minimum local ssi x^* est un minimum global.

Soit x^* un minimum local

C.N. du 1er ordre : $Qx^* - b + A^t \lambda^* = 0$ $\qquad A = \begin{pmatrix} \text{———} \\ \\ \end{pmatrix}$ une ligne de A $\equiv \nabla h_i$

C.N du 2è ordre : $y \cdot Qy \geq 0 \quad \forall y$ t.q. $Ay = 0$ i.e. $y \in$ espace tangent $= F(x^*)$

$\forall x$ t.q. $Ax = c$ alors $x = x^* + y$ avec y t.q. $Ay = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(x^*+y) \cdot Q(x^*+y) - b \cdot (x^*+y) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} y \cdot Qy}_{\varepsilon \geq 0} + y \cdot Qx^* + \underbrace{\frac{1}{2} x^* \cdot Qx^* - b \cdot x^*}_{f(x^*)} - b \cdot y \\
&= \varepsilon + f(x^*) + y \cdot [Qx^* - b] \\
&= \varepsilon + f(x^*) - \underbrace{y \cdot A^t \lambda^*}_{=0} \qquad \text{C.N. 1er ordre.} \\
&= \varepsilon + f(x^*) \geq f(x^*)
\end{aligned}$$

__Remarque :__ si $A \equiv 0$ alors espace tangent $= \mathbb{R}^n$ C.N. 2è ordre devient : Q semi déf. positive.
et on retrouve l'hypothèse de convexité de f.

A $n \times n$ matrice symétrique

nous allons montrer que A a n vecteurs propres unitaires et orthogonaux 2 à 2.

1/ soit (P_1) $\begin{cases} \max & f(x) = x^T . A x \\ \text{s.c} & g_1(x) = \|x\|^2 - 1 = 0 \end{cases}$

m.q la sol. x^* est un vecteur propre de A (de longueur 1 par la contrainte)

$\begin{cases} f(x) \text{ est continue} \\ \text{l'ens. des X réalisables est non vide, fermé, et borné} \end{cases}$ $\Rightarrow$ l'image par f est fermé, borné et les bornes sont atteintes.

donc (P_1) a une solution $X^{(1)}$

D'après le th. 7.2.1, $\exists\, d_1$ t.q. $\nabla f(X^{(1)}) + d_1 \nabla g_1(X^{(1)}) = 0 \Rightarrow$

$$2AX^{(1)} + d_1 2X^{(1)} = 0 \Rightarrow$$

$$AX^{(1)} = -d_1 X^{(1)}$$

donc $X^{(1)}$ est un vecteur propre de A (de longueur 1)

2/ soit (P_2) $\begin{cases} \max & f(x) = x^T . A x \\ \text{s.c} & g_1(x) = \|x\|^2 - 1 = 0 \\ & g_2(x) = x^T . X^{(1)} = 0 \end{cases}$ où $X^{(1)}$ sol. de (P_1)

m.q la solution x^* est encore un vecteur propre de A (longueur 1)

$\begin{cases} f(x) \text{ est continue} \\ \text{l'ens des X réalisable est non vide, fermé, borné} \end{cases}$ $\Rightarrow$ l'image par f est fermé, borné et les bornes sont atteintes

donc (P_2) a une solution $X^{(2)}$

D'après le th. 7.2.1, $\exists\, d_1, d_2$ t.q $\nabla f(X^{(2)}) + d_1 \nabla g_1(X^{(2)}) + d_2 \nabla g_2(X^{(2)}) = 0 \Rightarrow$

$$2AX^{(2)} + 2d_1 X^{(2)} + d_2 X^{(1)} = 0$$

$X^{(2)}$ est orthogonal à $X^{(1)}$ d'après contrainte g_2, en multipliant l'équation par $X^{(1)}$

$$\Rightarrow 2X^{T(1)} . AX^{(2)} + \underbrace{2d_1 X^{(2)} . X^{(1)}}_{\to 0} + d_2 \underbrace{\|X^{(1)}\|^2}_{1} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d_2}{2} = X^{T(1)} . AX^{(2)} = (A^T X^{(1)})^T . X^{(2)} = (AX^{(1)})^T X^{(2)} = \mu_1 X^{T(1)} . X^{(2)} = 0$$

$X^{T(1)} A = (X^{T(1)} . A)^{TT}$ A symétrique val. propre de $X^{(1)}$

$\Rightarrow d_2 = 0$

finalement $2AX^{(2)} + 2d_1 X^{(2)} = 0 \Rightarrow AX^{(2)} = -d_1 X^{(2)}$

donc $X^{(2)}$ est un vecteur propre de A (de longueur 1) et $\perp$ à $X^{(1)}$

3/ - On peut répéter le processus jusqu'à $k = n$. Au delà $k = n+1$ le pb. (P_{n+1}) a un ensemble de sol. réalisable vide. Il est impossible d'avoir $(n+1)$ vecteurs mutuellement $\perp$ dans $\mathbb{R}^n$.

- l'hyp. du th. 7.2.1 $\nabla g_1(X^{(k+1)}), \dots, \nabla g_{k+1}(X^{(k+1)})$ est linéairement indt est vérifié.

car $\nabla g_1, \nabla g_2, \dots, \nabla g_{k+1} = 2X^{(k+1)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ est linéairement indt d'après les contraintes de (P_{k+1})

$$\min \ (x_1-1)^2 + x_2^2 \quad s.c. \quad g_1(x) = 2kx_1 - x_2^2 \leq 0 \qquad \text{avec } k>0$$

<u>conditions 1er ordre</u> (Kühn-Tücker)

$$\begin{bmatrix} 2(x_1-1) \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2k \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1 \times (2kx_1 - x_2^2) = 0 \quad , \quad \lambda_1 \geq 0$$

$\nabla g_1 \neq 0$ → donc tout point est <u>qualifié</u> par le critère de l'indépendance linéaire → les conditions sont donc <u>nécessaires</u> à l'optimalité locale

- $\lambda_1 = 0 \to \begin{bmatrix} 2(x_1-1) \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ c'est le centre du cercle, ne vérifie pas $g_1(x) \leq 0$

- $\lambda_1 > 0 \to 2kx_1 = x_2^2$
  $2x_2 - 2\lambda_1 x_2 = 0 \to 2x_2(1-\lambda_1) = 0 \to x_2 = 0$ ou $\lambda_1 = 1$
  - $x_2 = 0 \to x_1 = 0 \to -2 + \lambda_1 2k = 0 \to \lambda_1 = 1/k > 0$
  - $\lambda_1 = 1 \to 2(x_1-1) + 2k = 0 \to x_1 = 1-k \to x_2^2 = 2k(1-k) \to k \leq 1$

donc les points vérifiant K.T sont :

$$\underbrace{(0,0)}_{x^{(1)}}, 1/k \qquad \underbrace{\underbrace{(1-k, \sqrt{2k(1-k)})}_{x^{(2)}}, 1 \qquad \underbrace{(1-k, -\sqrt{2k(1-k)})}_{x^{(3)}}, 1}_{\text{avec } k \leq 1}$$

les conditions K.T ne sont pas suffisantes car il manque la convexité de $g_1(x)$

<u>conditions du 2è ordre</u>

$$H\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda_1) \end{bmatrix}$$

<u>condition nécessaire</u> (les points doivent être qualifiés ce qui est le cas)

- pour $x^{(1)}, 1/k$ $\quad H\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1-1/k) \end{bmatrix}$

cône tangent à $S^+(x^{(1)}) = \{x : g_1(x) = 0\}$ en $x^{(1)}$ car $x^{(1)}$ vérifie le critère ind. linéaire
est $F^+(x^{(1)}) = \{y : \nabla g_1(x^{(1)}) \cdot y\}$
$= \{y : 2ky_1 \ \text{[illegible]} = 0\} = \{(0, y_2) : y_2 \text{ quelc.}\}$

$y \in$ cône tangent $\to y \cdot H\mathcal{L} y = y_2^2 \, 2(1-1/k)$ pas toujours ≥ 0 si $k<1$ → <u>cond. nécessaire non vérifiée</u> si $k<1$
→ $x^{(1)}$ <u>pas min. local</u> si $k<1$

- pour $x^{(2)}, 1$ $\quad H\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ semi défini positif partout donc en particulier sur cône tangent à $S^+(x^{(2)})$ en $x^{(2)}$

- pour $x^{(3)}, 1$ $\quad$ idem

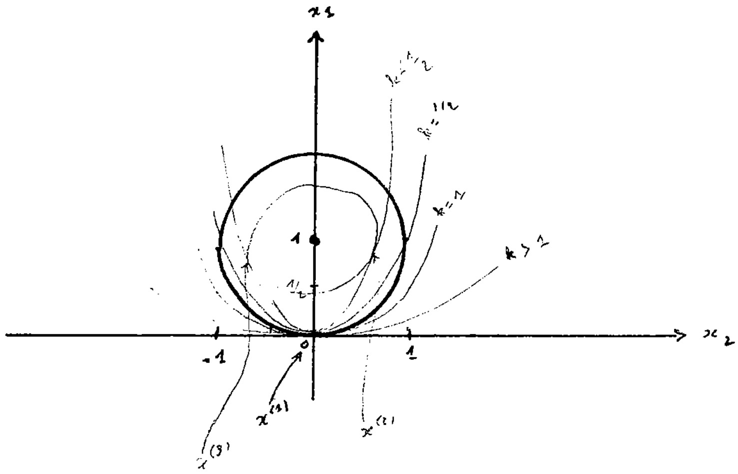
<u>condition suffisante</u> (maintenant la qualification n'est pas requise car cond. suffisantes)

- pour $x^{(2)}, 1$ $(k \leq 1)$
  $F^+(x^{(2)}) = \{y : \nabla g_1(x^{(2)}) \cdot y = 0\} = \{y : 2ky_1 - 2\sqrt{2k(1-k)}\, y_2 = 0\}$
  $y \cdot H\mathcal{L} y = 2y_1^2 \geq 0 (y \in F^+(x^{(2)}))$ si $=0$ alors $y_1 = 0$ alors $y_2 = 0$ si $k<1$
  donc $H\mathcal{L}$ définie positive sur $F^+(x^{(2)})$ si $k<1 \Rightarrow x^{(2)}$ <u>min. local strict</u> <u>si</u> $k<1$ (pour $k=1$ on ne peut rien dire)

- pour $x^{(3)}, 1$ $(k \leq 1)$
  $F^+(x^{(3)}) = \{y : \nabla g_1(x^{(3)}) \cdot y = 0\} = \{y : 2ky_1 + 2\sqrt{2k(1-k)}\, y_2 = 0\}$
  de même $H\mathcal{L}$ définie positive sur $F^+(x^{(3)})$ si $k<1 \Rightarrow x^{(3)}$ <u>min. local strict</u> <u>si</u> $k<1$ (pour $k=1$ on ne peut rien dire)

- pour $x^{(1)}, 1/k$
  avec $k=1 \to H\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $F^+(x^{(1)}) = \{(0, y_2) : y_2 \text{ quelc.}\} \to H\mathcal{L}$ pas déf. positive sur $F^+(x^{(1)})$ →
  on ne peut pas conclure et pourtant graphiquement on voit que $x^{(1)}$ est min.
  avec $k>1 \to H\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1-1/k) \end{bmatrix}$ est déf. positive partout donc en particulier sur $F^+(x^{(1)})$ →
  $x^{(1)}$ est un <u>min. local strict</u>

<u>Représentation graphique du pb.</u>



$g_1(x) = 2kx_1 - x_2^2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad x_1 \leq \frac{x_2^2}{2k}$

intersection du cercle rouge (rayon $= 1$) avec la courbe $x_1 = \frac{x_2^2}{2k}$ (frontière des solutions réalisables)

$x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 = 1 \rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 1 + 2kx_1 = 1 \rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 2kx_1 = 0 \rightarrow x_1\big(x_1 - 2(1-k)\big) = 0$

2 solutions si $k \leq 1$ $\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 2(1-k) \geq 0 \rightarrow k \leq 1 \end{cases}$

1 solution sinon

Optimisation mathématique

(septembre de l'an 2002)

Tout document autorisé.
Pas de calculatrice électronique.

1. Programmation géométrique

On considère le problème géométrique (P) suivant:

minimiser $\frac{x_1x_2x_3}{2}+\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{16}{x_3}$ sous les contraintes $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$

Ecrire (D) le dual (géométrique) de (P).
Calculer la solution de (D).
A partir de la solution de (D), calculer la solution de (P).

2. Méthode du gradient conjugué

Appliquer la méthode du gradient conjugué pour minimiser $f(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_2^2-4x_1x_2-12x_2$ en partant du point (0,0).
Vérifier que les 2 directions obtenues sont bien conjuguées par rapport au hessien de f.

3. Conditions de Kuhn-Tucker

On considère le problème (P) suivant:

$$\min_{s,y} s \text{ s.c. } \begin{cases} y+s\geq\frac{3}{4} & (1)\\ -y+s\geq 0 & (2)\\ s\geq 0 & (3)\end{cases}$$

On associe respectivement les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ aux contraintes (1), (2), (3) de (P).

1° Ecrire les conditions de Kuhn-Tucker de (P).
2° On s'intéresse maintenant à la résolution des conditions de Kuhn-Tucker.
Est-il possible d'avoir s=0 dans (P)? En déduire la valeur de λ_3 .
Trouver alors λ_1,λ_2.
En utilisant les conditions de complémentarité, en déduire la solution de (P).
3° Ecrire la fonction duale $h(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ relative au problème (P) et le problème (D) dual de (P). Evaluer la fonction duale h au point trouvé en 2. En déduire que ce point est solution du problème dual (D).

Conditions de Kühn-Tücker

On considère le pb (P) $\min s$ s.c. $\begin{cases} y + s \geq \frac{3}{4} & (1) \\ -y + s \geq 0 & (2) \\ s \geq 0 & (3) \end{cases}$

On associe les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aux contraintes de (P)

1) Écrire les conditions de Kühn-Tücker du pb (P)

Est-il possible d'avoir $s = 0$ dans (P) ? En déduire la valeur de λ_3.

Trouver alors λ_1, λ_2.

En utilisant les conditions de complémentarité, trouver la solution de (P)

2) Évaluer la fonction duale $h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ au point trouvé en 1.
A-t-on atteint en ce point le $\max h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ s.c. $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$?

En déduire que ce point est solution du pb dual de (P).

1) $$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \times (1) = 0$, $\lambda_2 \times (2) = 0$, $\lambda_3 \times (3) = 0$

$s > 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

il reste $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} (1) = 0 \\ (2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + s = \frac{3}{4} \\ -y + s = 0 \end{cases} \Rightarrow y = s = \frac{3}{8}$

2) $$h(\lambda) = \min_{s,y} s + \underbrace{\lambda_1}_{1/2}\left(\frac{3}{4} - y - s\right) + \underbrace{\lambda_2}_{1/2}(y - s) + \underbrace{\lambda_3}_{0}(-s)$$

$$= \frac{3}{8}$$

la valeur de (P) est $\frac{3}{8}$ $\rightarrow$ valeur de (P) $= h(\lambda)$ en $\lambda = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

donc $\max h(\lambda) = \frac{3}{8}$

corrigé voir contrôle de mai 01

I Soit le pb suivant :

$$(P) = \text{minimiser } \sum_i c_i x_i \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_i a_i x_i = b \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \end{cases}$$

où a_i, b et c_i sont des constantes strict. positives.

1) Ecrire les conditions de K.T. de (P) les résoudre et en déduire la solution de (P).

2) On considère le pb dual (lagrangien) de (P) construit en "dualisant" uniquement la contrainte d'égalité avec un multiplicateur μ.

M.q. ce pb peut s'écrire :

$$(D) = \text{maximiser } -\mu b \quad \text{s.c.} \quad c_i + \mu a_i \geq 0 \quad \forall i$$

et le résoudre.

Comparer les valeurs de (P) et (D).

3) A.N. Résoudre le pb suivant : minimiser $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 11x_6 = 18 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

- On considère maintenant le pb (P) auquel on rajoute les contraintes $x_i \leq 1 \quad \forall i$

$$(P') = \text{minimiser } \sum_i c_i x_i \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_i a_i x_i = b \\ x_i \geq 0, \ x_i \leq 1 \quad \forall i \end{cases}$$

Soit I^1, $\{i\}$, I^0 une partition des indices t.q. $\begin{cases} -\frac{c_j}{a_j} \geq -\frac{c_i}{a_i} \geq -\frac{c_k}{a_k} \quad \forall j \in I^1, \forall k \in I^0 \\ \sum_{j \in I^1} a_j \leq b \quad \text{et} \quad \sum_{j \in I^1} a_j + a_i > b \end{cases}$

1) Ecrire les conditions de K.T. de (P') et m.q. x défini par $\begin{cases} x_j = 1 \quad \forall j \in I^1 \\ x_i = \frac{1}{a_i}\left(b - \sum_{j \in I^1} a_j\right) \\ x_k = 0 \quad \forall k \in I^0 \end{cases}$

les satisfait. En déduire la solution de (P').

2) A.N. Résoudre le pb suivant : minimiser $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 11x_6 = 18 \\ x_i \geq 0, \ x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Minimisation d'une forme linéaire sur un ellipsoïde. Relation avec la méthode du gradient projeté.

Soit le problème (P) :

$$\min c^t y \quad s.c. \quad \begin{cases} Ay = 0 \\ \left\|D^{-1}y\right\|^2 \leq \beta^2 \end{cases}$$

où c est un n-vecteur colonne, A une $m\times n$-matrice avec $m\leq n$ et constituée de m lignes linéairement indépendantes, D une $n\times n$-matrice diagonale inversible (chaque élément de la diagonale est non nul) et β un scalaire positif. $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne de sorte que $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

1) Montrer que si c est combinaison linéaire des lignes de A (transposées) alors le minimum de (P) est nul.

2) On suppose maintenant que c n'est pas combinaison linéaire des lignes de A (transposées).
a) Ecrire les conditions de Kühn-Tücker pour le problème (P). On écrira ces conditions sous forme matricielle.
b) Les conditions de Kühn-Tücker sont-elles dans ce cas, des conditions suffisantes d'optimalité ?
c) Résoudre les conditions de Kühn-Tücker et montrer que la solution de (P) est donnée par $y = -\beta \frac{D^2(c+A^t\mu)}{\left\|D(c+A^t\mu)\right\|}$

avec $\mu = -\left(AD^2A^t\right)^{-1} AD^2c$. On admettra que $AD|^2A|^t$ est inversible.

3) On suppose maintenant que $D = I$ la matrice identité (d'ordre n).
a) Montrer que la solution de (P) est, à la norme près, la projection de $-c$ sur l'espace $L = \{y : Ay = 0\}$.
b) On considère le problème (Pb):

$\min f(x) \quad s.c. \quad a_i{}^t x \leq b_i \ i \in I, a_i{}^t x = b_i \ i \in J$

où f est une fonction de classe C^1, les a_i sont des n-vecteurs colonnes, I et J sont deux ensembles disjoints d'indices.
x étant un point réalisable de (Pb) (c'est-à-dire satisfaisant les contraintes), on note $I(x)$ les indices des contraintes d'inégalités saturées par x. Soit A la matrice dont les lignes sont les a_i transposés pour i parcourant $I(x)\cup J$. On suppose que les lignes de A sont linéairement indépendantes. On rappelle que la dérivée de f au point x dans la direction y est donnée par $\nabla f(x)^t y$.
Au vu du problème (P), quelle est la caractéristique de la direction utilisée dans l'algorithme du gradient projeté ?

Conditions de Kühn - Tucker

Ex. 4.26 p. 177 (Sherali)

Soit le pb : $\min_y \; y_1$ s.c. $\|y - y_0\|^2 \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$ (1) et $e^t y = 1$ (2)

où $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $y_0 = \begin{bmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, $n \geq 2$

On notera $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

a) Ecrire les conditions de K.T. On notera $\vartheta \geq 0$ le multiplicateur de Lagrange associé à (1) et μ celui associé à (2)

b) Montrer que $\mu = -\dfrac{1}{n}$, $2\vartheta = n - 1$

c) Finalement en déduire que la solution optimale est $y^* = \left[0, \dfrac{1}{n-1}, \ldots, \dfrac{1}{n-1}\right]^t$

a) K.T. $\begin{cases} e_1 + 2\vartheta(y - y_0) + \mu e = 0 & (3) \\ \vartheta \times \left[\|y - y_0\|^2 - \dfrac{1}{n(n-1)}\right] = 0, \quad \vartheta \geq 0 & (4) \end{cases}$

on remarque que $\vartheta = 0$ est impossible car (3) $\to e_1 + \mu e = 0$, ce qui implique $\|y - y_0\|^2 = \dfrac{1}{n(n-1)}$ par (4)

b) on multiplie (scalairement) (3) par e : $e^t e_1 + 2\vartheta e^t (y - y_0) + \mu e^t e = 1 + 2\vartheta[\underbrace{e^t y}_{1} - \underbrace{e^t y_0}_{1}] + \mu \times n = 0$

$\Rightarrow \boxed{\mu = -\dfrac{1}{n}}$

(3) $\to y - y_0 = \dfrac{1}{2\vartheta} \times \left[\dfrac{e}{n} - e_1\right] \to \|y - y_0\|^2 = \dfrac{1}{4\vartheta^2}\left\|\dfrac{e}{n} - e_1\right\|^2$

$\left\|\dfrac{e}{n} - e_1\right\|^2 = \left[\dfrac{1}{n} - 1\right]^2 + \left[\dfrac{1}{n}\right]^2 (n-1) = \left[\dfrac{1-n}{n}\right]^2 + \left[\dfrac{1}{n}\right]^2 (n-1) = \left[\dfrac{1}{n}\right]^2 \left[(1-n)^2 + n - 1\right] = \left[\dfrac{1}{n}\right]^2 \left[n^2 - n\right] = \dfrac{1}{n}[n-1]$

comme $\|y - y_0\|^2 = \dfrac{1}{n(n-1)}$ (par (4)) on a : $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{4\vartheta^2} \times \dfrac{1}{n}(n-1) \Rightarrow 4\vartheta^2 = (n-1)^2 \Rightarrow \boxed{2\vartheta = n - 1 > 0}$

c) $y - y_0 = \dfrac{1}{2\vartheta} \times \left[\dfrac{e}{n} - e_1\right] = \dfrac{1}{n-1}\left[\dfrac{e}{n} - e_1\right]$

puisque $y_0 = \dfrac{e}{n} \to y = \dfrac{e}{n}\left[\dfrac{1}{n-1} + 1\right] - \dfrac{e_1}{n-1} = \dfrac{e}{\cancel{n}} \times \dfrac{\cancel{n}}{n-1} - \dfrac{e_1}{n-1} = \dfrac{1}{n-1}[e - e_1]$

Optimisation Mathématique - 1ère année

le 9/6/95

durée 2h.30

Les <u>seuls</u> documents autorisés sont les notes de cours et de TD manuscrites

Problème 1

Partie I

On considère le problème (D): maximiser $\theta(u)$ sous les contraintes $u \geq 0$
où $u \in R^m$ et $\theta: R^m \to R$

On suppose que θ est différentiable en u* une solution (optimale) du problème (D).
On note C={ $u \in R^m$: $u \geq 0$ }.

On rappelle que:

- C étant convexe, $\forall u \in C \quad C - \{u\} \subseteq T(C,u)$ où T(C,u) désigne le cône tangent de C en u

- si u* est un maximum local de (D) alors $\nabla\theta(u^*) \bullet y \leq 0 \quad \forall y \in T(C,u^*)$

question 1): Soit u* maximum local de (D), montrer que $u_i^* > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial\theta(u^*)}{\partial u_i} = 0$ et que $u_i^* = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial\theta(u^*)}{\partial u_i} \leq 0$

On considère maintenant $\theta(u)$ la fonction duale du problème (P): minimiser f(x) sous les contraintes $g(x) \leq 0$ $x \in X \subseteq R^n$, où $f: R^n \to R$ et $g: R^n \to R^m$
Par définition $\theta(u) = \inf\{f(x) + u \bullet g(x): x \in X\}$

On note $X(u) = \{x \in X: f(x) + u \bullet g(x) = \theta(u)\}$

On rappelle que:
- si $\bar{x} \in X(u)$ alors $g(\bar{x})$ est un sous-gradient de θ en u.
- si de plus θ est différentiable au point u alors $g(\bar{x})$ est le gradient de θ en u

question 2): montrer que si θ est différentiable au point u* solution (optimale) du problème (D) et si $x^* \in X(u^*)$ alors (x*,u*) est un point selle pour le problème (P).

Partie II

Soit le problème (P): minimiser $f(x) = -x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 - 3x_2$ sous la contrainte $x_1^2 \leq 4$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$

1) f est-elle convexe?

2) Après avoir vérifié les conditions de qualification pour tout x, écrire les conditions de Kuhn et Tucker et les résoudre.

3) Montrer que le problème dual (D) de (P) se ramène au problème (D') suivant: maximiser $\theta(u)$ sous la contrainte u>1 , où $\theta(u)$ est la fonction duale du problème (P).

4) Résoudre le problème (D').
Soit u* une solution (optimale), déterminer X(u*).

5) Soit x* appartenant à X(u*), comparer f(x*) et $\theta(u^*)$.
Que peut-on en déduire pour x*?
Etait-ce prévisible, au vu des résultats de la partie I ?

Problème 2

Soit $S = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t : \; Ax = b, \; x_i \geq 0 \;\; i = 1, \ldots, 5 \right\}$
où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

On considère le problème (P): minimiser $f(x) = 2x_1 - x_2$ sous les contraintes $x \in S$

1) Calculer le point extrême de S associé à la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ constituée des colonnes 1 et 4 de A.

2) Résoudre le problème (P) par l'algorithme du simplexe en partant du point extrême $(2,0,0,1,0)^t$

3) Donner un point extrême de S non rencontré dans le déroulement précédent de l'algorithme.

Barême

Problème 1
partie I-1 = 3 points, 2 = 2 points
partie II-1 = 1 points, 2 = 4 points, 3 = 1 points, 4 = 3 pts, 5 = 1 pts

Problème 2
1 = 1 point , 2 = 4 points , 3 = 2 points

Correction optimisation mathématique du 9/6/95.

Problème 1

Partie I

1) u^* max local $\Rightarrow$ $\nabla\theta(u^*)\cdot y \leq 0 \quad \forall\, y \in T(C,u^*)$

en particulier $\forall\, y \in C - \{u^*\}$ car $C - \{u^*\} \subseteq T(C,u^*)$

où $C = \{u \geq 0\}$ de $\mathbb{R}^m$.

On note $u^* = \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{bmatrix}$

- soit i t.q. $u_i^* > 0$, alors on construit $y \in C - \{u^*\}$ de la manière suivante :

$$y_i = 2u_i^* - u_i^*$$
$$y_j = u_j^* - u_j^* \quad \text{pour } j \neq i$$

$$y = \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ 2u_i^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_i^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ u_i^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y est bien de la forme un élément de $C - u^*$ car $2u_i^*$ et u_j^* sont ≥ 0.

$$\nabla\theta(u^*)\cdot y = \frac{\partial\theta(u^*)}{\partial u_i}\, u_i^* \leq 0 \qquad (1)$$

1 pt

, ensuite on construit $y \in C - \{u^*\}$ de la manière suivante :

$$y_i = 0 - u_i^*$$
$$y_j = u_j^* - u_j^* \quad \text{pour } j \neq i$$

$$\nabla\theta(u^*)\cdot y = -\frac{\partial\theta(u^*)}{\partial u_i}\, u_i^* \leq 0 \qquad (2)$$

1 pt.

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial u_i}(u^*) = 0$.

- soit i t.q. $u_i^* = 0$, alors on construit $y \in C - \{u^*\}$ de la manière suivante :

$$y_i = 1 - 0$$
$$y_j = u_j^* - u_j^* \quad \text{pour } j \neq i$$

$$\nabla\theta(u^*)\cdot y = \frac{\partial\theta}{\partial u_i}(u^*) \leq 0$$

1 pt.

2) u^* est maximum global (donc local). On peut appliquer les résultats de la question 1 sachant que $\nabla\theta(u^*) = g(x^*)$ $x^* \in X(u^*)$

donc $u_i^* > 0 \Rightarrow g_i(x^*) = 0$
$u_i^* = 0 \Rightarrow g_i(x^*) \leq 0$ 1 pt

Les conditions 1, 2, 3 de caractérisation d'un point selle sont satisfaites :

3) (les relations de complémentarités) $u_i^* g_i(x^*) = 0$ $i = 1, \dots, m$

2) (x^* réalisable) $g(x^*) \leq 0$

1) x^* réalise l'inf de $f(x) + u^* . g(x)$ $x \in X$ par définition de x^* ($x^* \in X(u^*)$) 1 pt.

Partie II

1) $Hf = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ pas semi-définie positif donc pas convexe. 1 pt.

2) $g(x) = x_1^2 - 4$

vérifions la condition de l'ind. linéaire : $\nabla g(x)$ lin^t ind^t pour x saturant la contrainte ($g(x) = 0$)

$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ sauf pour $x_1 = 0$ mais pour ce type de point $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la contrainte n'est pas saturée. 1 pt.

conditions de Kuhn. Tücker : trouver x vérifiant la contrainte et λ t.q.

$$\begin{pmatrix} -2x_1 + 4 \\ 4x_2 - 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda(x_1^2 - 4) = 0$ et $\lambda \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 4 + 2\lambda x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{4} \\ \lambda(x_1^2 - 4) = 0 \quad , \lambda \geq 0. \end{cases}$$

1 pt

<u>1er cas</u> : $\lambda > 0 \Rightarrow x_1^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = \pm 2$

- $x_1 = 2$, $\cancel{x_2 = \frac{3}{4}}$ $\Rightarrow \lambda = 0$ impossible.
- $x_1 = -2$ $\Rightarrow \lambda = 2$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$ solution.

1 pt.

2^{è} cas: $d=0$. $-2x_1+4=0 \Rightarrow x_1=2$, la contrainte $x_1^2 \leq 4$ est vérifiée.
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$ est solution. 1 pt.

3) Pour tout $d \geqslant 0$ on cherche l'inf. de $-x_1^2+4x_1+2x_2^2-3x_2+d(x_1^2-4)$
$= (d-1)x_1^2+4x_1+2x_2^2-3x_2-4d$ pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

pour $d \leqslant 1$ cet inf. vaut $-\infty$ 1 pt.
Comme le pb dual est maximiser $\theta(d)$ pour $d \geqslant 0$
Il est sûr que les valeurs $d \leqslant 1$ ne sont pas optimales.

4) cherchons l'inf. de $(d-1)x_1^2+4x_1+2x_2^2-3x_2-4d$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$d>1 \Rightarrow$ cette fonction est convexe. $\Rightarrow$ il suffit de chercher un optimum local qu'on obtiendra en annulant le gradient :

$$\begin{cases} 2(d-1)x_1+4=0 \\ 4x_2-3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{d-1}, \quad x_2=\frac{3}{4}$$ 1 pt.

$$\theta(d) = (d-1)\frac{4}{(d-1)^2} - \frac{8}{d-1} + 2\times\frac{9}{16} - \frac{9}{4} - 4d$$

$$= -\frac{4}{d-1} - 4d - \frac{9}{8}$$ θ est bien concave.

maximisons θ :
$$\theta'(d) = \frac{4}{(d-1)^2} - 4 = 0 \Rightarrow (d-1)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{d=2}$$ 1 pt.
$d=0$ impossible.

$$X(2) = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3/4 \end{pmatrix}\right\}$$ 1 pt.

5) • $f\begin{pmatrix} -2 \\ 3/4 \end{pmatrix} = -\frac{105}{8}$ $\theta(2) = -\frac{105}{8}$

1/2 pt donc $f(x^*) = \theta(u^*)$. De plus, x^* est réalisable pour (P), u^* est réalisable pour (D) d'après th. du cours x^* et u^* sont respectivement solutions de (P) et (D)
• θ est différentiable en $u^*=2$ et donc (x^*, u^*) est un point selle
1/2 pt. D'après th. du cours (x^*, u^*) point selle $\Rightarrow$ x^* et u^* sont resp. solutions de (P) et (D)

Problème 2

1) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$

le point extrême est : $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

1 pt.

2)

B	$B^{-1}a_1$	$B^{-1}a_2$	$B^{-1}a_3$	$B^{-1}a_4$	$B^{-1}a_5$	$B^{-1}b$
1	1	-1	1	0	-1	2
4	0	-1	3	1	-2	1 →
coût réduits	0	1	-2 ↑	0	2	

2 pts

$\min \{ 2/1 , 1/3 \} = 1/3$ a_3 remplace a_4

B	$B^{-1}a_1$	$B^{-1}a_2$	$B^{-1}a_3$	$B^{-1}a_4$	$B^{-1}a_5$	$B^{-1}b$
1	1	-2/3	0	-1/3	-1/3	5/3
3	0	-1/3	1	1/3	-2/3	1/3
	0	1/3	0	2/3	2/3	

2 pts.

optimum atteint car coût réduits ≥ 0

solution : $\begin{bmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ valeur $= 10/3$

3) Il n'y a pas d'autres points esctrêmes. 2 pts.

Un jeune homme égocentrique a hérité d'une fortune F et il veut maintenant planifier comment la dépenser de façon à maximiser son plaisir sur une période donnée. Il déduit que si $x(k)$ désigne son capital au début de l'année k, son bien sera approximativement gouverné par l'équation :

$$x(k+1) = \alpha\, x(k) - u(k)$$
$$x(0) = F$$

où $\alpha \geqslant 1$ ($\alpha - 1$ représentant le taux d'intérêt d'un placement) et où $u(k)$ est la dépense dans l'année. Il décide que son plaisir atteint dans l'année k est exprimé par $\psi(u(k))$:

Le plaisir total sur une période donnée est :

$$J = \sum_{k=0}^{N} \psi(u(k))$$

Le jeune homme désire déterminer la séquence de dépenses qui maximisera son plaisir total avec la condition que $x(N+1) = 0$

Résoudre le pb pour $N = 3$ et $\psi(u) = u^{1/2}$

On considère x_k, u_k comme des variables vérifiant les équations :

(1) $u_0 = \alpha F - x_1 \quad \rightarrow \quad h_0(u,x) = \alpha F - x_1 - u_0 = 0$

(2) $u_1 = \alpha x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad h_1(u,x) = \alpha x_1 - x_2 - u_1 = 0$

(3) $u_2 = \alpha x_2 - x_3 \quad \rightarrow \quad h_2(u,x) = \alpha x_2 - x_3 - u_2 = 0$

(4) $u_3 = \alpha x_3 - \underbrace{x_4}_{0} \quad \rightarrow \quad h_3(u,x) = \alpha x_3 - u_3 = 0$

<u>conditions de Lagrange:</u>

$$\begin{array}{c} \\ u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}
\begin{array}{c} \nabla J \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2u_0^{1/2}} \\ \frac{1}{2u_1^{1/2}} \\ \frac{1}{2u_2^{1/2}} \\ \frac{1}{2u_3^{1/2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}
+ \lambda_0
\begin{array}{c} \nabla h_0 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}
+ \lambda_1
\begin{array}{c} \nabla h_1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}
+ \lambda_2
\begin{array}{c} \nabla h_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}
+ \lambda_3
\begin{array}{c} \nabla h_3 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>résolution:</u>

$\lambda_0 = \frac{1}{2u_0^{1/2}}$ $\lambda_1 = \frac{1}{2u_1^{1/2}}$ $\lambda_2 = \frac{1}{2u_2^{1/2}}$, $\lambda_3 = $

$$\begin{cases} -\frac{1}{2u_0^{1/2}} + \frac{\alpha}{2u_1^{1/2}} = 0 \Rightarrow u_1 = \alpha^2 u_0 \\ -\frac{1}{2u_1^{1/2}} + \frac{\alpha}{2u_2^{1/2}} = 0 \Rightarrow u_2 = \alpha^2 u_1 = \alpha \\ -\frac{1}{2u_2^{1/2}} + \frac{\alpha}{2u_3^{1/2}} = 0 \Rightarrow u_3 = \alpha^2 u_2 = \alpha \end{cases}$$

(1), (2), (3), (4)

$\Rightarrow u_3 = \alpha^2 x_2 - \alpha u_2$
$= \alpha^3 x_1 - \alpha^2 u_1 - \alpha u_2$
$= \alpha^4 F - \alpha^3 u_0 - \alpha^2 u_1 - \alpha u_2$

$$\left.\begin{array}{l} u_3 = \alpha^4 F - \alpha^3 u_0 - \alpha^4 u_0 - \alpha^5 u_0 \\ u_3 = \alpha^6 u_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{u_0 = \frac{\alpha F}{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3} \quad \text{on en déduit } u_1, u_2, u_3}$$

<u>conditions du 2^e ordre :</u>

$$H_\ell = H_J = -\frac{1}{4}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_0^{3/2}} & & & & & & \\ & \frac{1}{\mu_1^{3/2}} & & & & 0 & \\ & & \frac{1}{\mu_2^{3/2}} & & & & \\ & & & \frac{1}{\mu_3^{3/2}} & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} a & & & & & & \\ & b & & & & 0 & \\ & & c & & & & \\ & & & d & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

H_ℓ : hessien de la fonction de Lagrange.

$a > 0$
$b > 0$
$c > 0$
$d > 0$

espace tangent $M = \{ (v, y) : v_0 + y_1 = 0 \ , \ v_1 + y_2 = \alpha y_1 , \ v_2 + y_3 = \alpha y_2 \ , \ v_3 = \alpha y_3 \}$

$$(v, y)\, H_\ell\, (v, y) = -\frac{1}{4}\big(\underbrace{a \times v_0^2 + b v_1^2 + c v_2^2 + d v_3^2}_{\geqslant 0}\big) = 0 \quad \text{ssi} \quad v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$y_1 = 0$
$y_2 = 0$ sur M
$y_3 = 0$

donc H_ℓ est déf négatif sur M $\Rightarrow$ maximum strict

J est concave (H_J semi déf négatif) et l'ensemble des solutions est convexe

$\Rightarrow$ maximum global

autre : la fonction de Lagrange est concave (H_ℓ semi - déf - négatif)
donc la solution des conditions de K.T est un point selle.
$\Rightarrow$ optimum global

III - Soit P_α le problème suivant où α est un nombre réel fixe.

Min $x_1 + \alpha x_2$

s.c. $x_2 - x_1 \leq 0$

$-x_1^2 + x_1 + 1 - x_2 \leq 0$

On note S l'ensemble des contraintes de P_α,et f_α la fonction $x_1 + \alpha x_2$

1°) Représenter graphiquement S et montrer que tout point de S est qualifié.

2°) Soit $\alpha = -1$.Trouver alors les solutions de P_{-1}.

3°) Soit a = (-1,-1) et b = (1,1) deux vecteurs de R^2.

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles a (respectivement b) peut être une solution de P_α.(Utiliser les conditions de Lagrange)

4°) Soit $\alpha < -1$.Montrer que pour tout $y \in F(a), y \neq 0$,on a $\nabla f_\alpha(a).y > 0$.

En déduire les valeurs de α pour lesquelles a est solution de P_α.

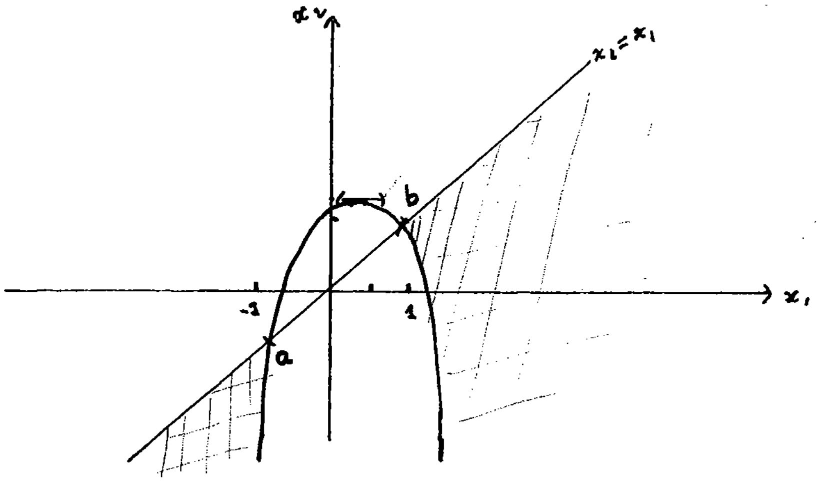
minimum local

5°) Soit $\alpha=1$.Etudier la restriction de f_1 à l'ensemble $S' = \{x \in S \, / \, -x_1^2 + x_1 + 1 - x_2 = 0\}$.

En déduire que b ne peut être solution de P_1

Optimisation mathématique

année 91-92 Problème III

1/ 

$g_1 = x_2 - x_1 \leq 0$

$g_2 = -x_1^2 + x_1 + 1 - x_2 \leq 0$

$x_2 \geq -x_1^2 + x_1 + 1$ $\quad x_2 \stackrel{?}{=} 0$ $\quad \Delta = 1 + 4 = 5$ $\quad x_1 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

dérivée : $-2x_1 + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

x_0 qualifié : une condition suffisante : $\nabla g_i(x_0)$ $i \in G(x_0)$ sont lin^t ind^t

où $G(x_0) = \{ i \,/\, g_i(x_0) = 0 \}$

on va montrer que ∇g_1 et ∇g_2 sont partout lin^t ind^t sauf pour $x_1 = 0$
mais de tels points ne sont pas dans S.

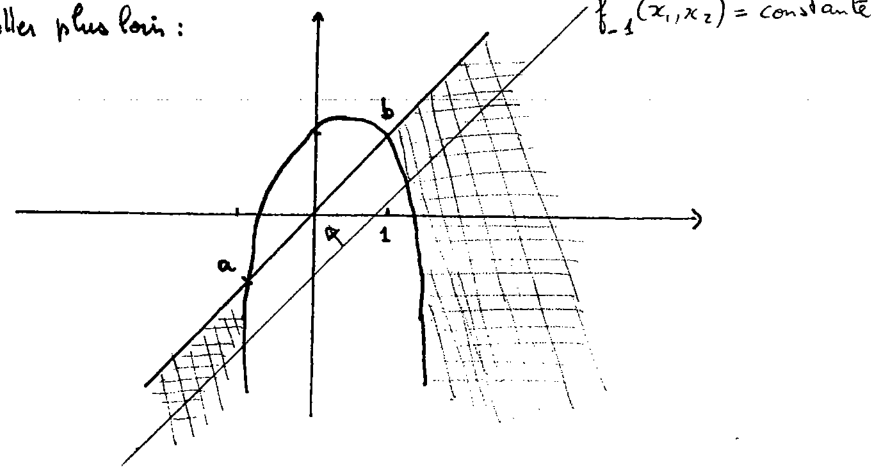
$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} -2x_1+1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pas lin^t ind^t $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2x_1+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2x_1 - 1 = 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

2/ $\alpha = -1$ $\quad f_{-1}(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

graphiquement : pour minimiser, il faut se déplacer dans le sens $-\nabla f_{-1} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

partons de $f_{-1}(x_1, x_2) = 0 \rightarrow x_1 - x_2 = 0 \rightarrow$ droite $x_2 = x_1$ qui correspond à g_1

on ne peut pas aller plus loin :



avec les conditions nécessaires de Kühne et Tucker

(x_1, x_2) ~~..~~ $\in S$, si (x_1, x_2) est solution de P_{-1} il vérifie :

$$\begin{cases} \nabla f_{-1}(x_1,x_2) + \Pi_1 \nabla g_1(x_1,x_2) + \Pi_2 \nabla g_2(x_1,x_2) = 0 \\ \\ \Pi_i\, g_i(x_1,x_2) = 0 \end{cases}$$

avec $\Pi_i \geq 0$

$$\nabla f_{-1}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1+1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_1(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 - \Pi_1 - 2\Pi_2 x_1 + \Pi_2 = 0 & \rightarrow \quad -\cancel{\Pi_2} - 2\Pi_2 x_1 + \cancel{\Pi_2} = 0 \\ -1 + \Pi_1 - \Pi_2 = 0 & \rightarrow \quad \Pi_1 = \Pi_2 + 1 \end{cases}$$

1er cas : $\Pi_2 = 0$ $\quad \Pi_1 = 1 \Rightarrow g_1(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ pour ces points $f_{-1} = 0$ et on ne peut pas faire mieux car $f_{-1} = -g_1 \geq 0$

$\Rightarrow$ solutions : droite $x_2 = x_1$ sauf la partie qui en dessous de g_2. On retrouve le résultat graphique.

2è cas : $\Pi_2 \neq 0 \rightarrow x_1 = 0$

$\Pi_2 \neq 0 \Rightarrow g_2(x_1,x_2) = 0 \rightarrow x_2 = 1$ on a $x_2 > x_1$ donc g_1 n'est pas vérifié

3/ a et b $\in S$

pour être solution de P_α a et b doivent nécessairement vérifié les conditions de Kuhn et Tucker (ce n'est pas suffisant)

$$\begin{cases} 1 - \Pi_1 - 2\Pi_2 x_1 + \Pi_2 = 0 \\ \alpha + \Pi_1 - \Pi_2 = 0 \\ \Pi_1 \times (x_1 - x_2) = 0 \\ \Pi_2 \times (-x_1^2 + x_1 + 1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

$\Big\}\rightarrow$ toujours vérifié pour a et b $\quad g_1(a) = g_1(b) = 0$, $\quad g_2(b) = g_2(b) = 0$, $\quad \Pi_i \geq 0$

$\boxed{a = (-1,-1)}$ $\quad 1 - \Pi_1 + 2\Pi_2 + \Pi_2 = 0 \rightarrow 1 - \Pi_1 + 3\Pi_2 = 0 \rightarrow \Pi_1 = 3\Pi_2 + 1$

$\alpha + \Pi_1 - \Pi_2 = 0 \rightarrow \alpha = \Pi_2 - \Pi_1 \Rightarrow \Pi_2 - 3\Pi_2 - 1 = -2\Pi_2 - 1$ avec $\Pi_2 \geq 0$

a peut être solution pour $\alpha \leq -1$

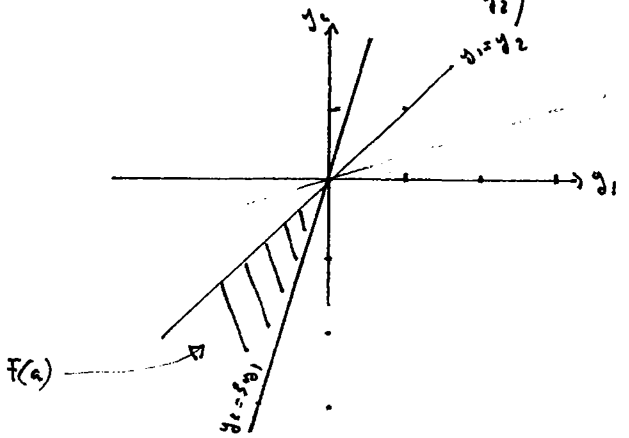
$\boxed{b = (1,1)}$ $\quad 1 - \Pi_1 - 2\Pi_2 + \Pi_2 = 0 \rightarrow 1 - \Pi_1 - \Pi_2 = 0 \rightarrow \Pi_1 = 1 - \Pi_2$

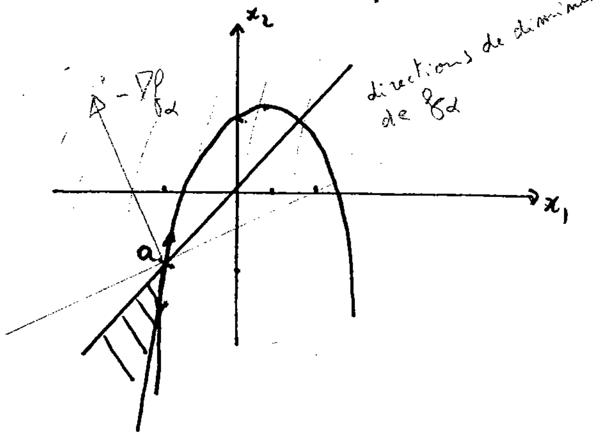
$\alpha + \Pi_1 - \Pi_2 = 0 \rightarrow \alpha = \Pi_2 - \Pi_1 = \Pi_2 - 1 + \Pi_2 = 2\Pi_2 - 1$ avec $\Pi_2 \geq 0$

b peut être solution pour $\alpha \geq -1$

4/ $y \in F(a) \iff \langle \nabla g_1(a) \mid y \rangle \le 0 \to (-1 \ \ 1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -y_1 + y_2 \le 0 \to y_1 \ge y_2$

$\langle \nabla g_2(a) \mid y \rangle \le 0 \to (3 \ \ -1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3y_1 - y_2 \le 0 \to y_2 \ge 3y_1$

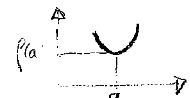




on constate que $y_2 \le 0$ et que $y_2 \neq 0$ sinon on aurait $y_1 = 0$ et y doit être $\neq 0$.

$$\langle \nabla f_\alpha(a) \mid y \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}(y_1 \ \ y_2) = y_1 + \underbrace{\alpha y_2}_{>0} = y_1 + |\alpha||y_2| > y_1 + |y_2| = y_1 - y_2 \ge 0$$

$\alpha < -1 \to |\alpha| > 1$



une direction admissible quelconque y est une direction d'augmentation stricte de $f_\alpha(x)$ donc a est min. local

car $f_\alpha(x) = f_\alpha(a) + \langle \nabla f_\alpha(a) \mid \theta y \rangle$ avec $\theta > 0$

car f_α est linéaire. Dans ce cas, a est seulement un min. local par ex : $f_\alpha(b) = 1 + \alpha < f_\alpha(a) = -1 - \alpha$ pour $1 + \alpha < 0$

pour $\alpha < -1$ a est minimum local

pour $\alpha = -1$ (voir question 2) a était une solution possible.

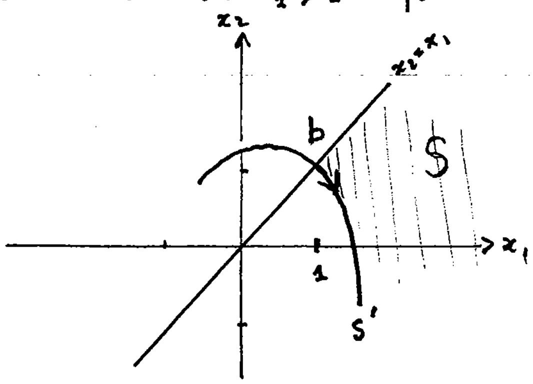
5/ f_1 restreint à S' : $f_1 = x_1 + x_2 = -x_1^2 + 2x_1 + 1$ on se restreint à S' car $\Pi_2 \neq 0$ pour $\alpha = 1$ (question 3)

$f_1' = -2x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$f_1'' = -2$ défini négative

$\Rightarrow x_1 = 1$ est un maximum global.

il suffit de se déplacer sur S' avec $x_1 > 1$ pour diminuer la valeur de f_1 tout en restant dans S



conclusion de 4/ et 5/. Les conditions de Kuhn et Tucker étaient suffisantes pour a mais pas pour b -

Contrôle Optimisation Mathématique

14 Juin 96. Durée=2H. 30

- Notes de cours et polycopiés autorisés
- Livres non autorisés

Problème 1

Rappels:
- un cône est un ensemble stable par multiplication par un scalaire positif.
- $A \subseteq R^n$, $Cône(A)$ est le plus petit cône convexe contenant A ou encore l'ensemble des combinaisons linéaires positives d'éléments de A.

Partie 1

Soit $P \subseteq R^n$, P convexe. $\bar{x} \in P$, on définit l'ensemble des directions réalisables de P en $\bar{x}$ par $F(\bar{x}) = \{u: \exists \varepsilon > 0,\ \bar{x} + \varepsilon u \in P\}$.
On appelle une arête de P un segment $[\bar{x}, \bar{y}]$ $(\bar{x} \neq \bar{y})$ qui est une face de P.

1) Montrer que si $[\bar{x}, \bar{y}]$ est une arête de P alors $\bar{x}, \bar{y}$ sont des points extrêmes de P.
2) Montrer que $F(\bar{x})$ est un cône convexe.
3) Montrer que $F(\bar{x}) = Cône(P - \{\bar{x}\})$ (notation: $P - \{\bar{x}\}$ est le translaté de P de $-\bar{x}$, non pas P privé de $\bar{x}$).

Partie 2

On considère maintenant $P = \left\{x \in R^n: Ax = b,\ x \geq 0\right\}$, où A est une matrice m lignes, n colonnes, de rang m et b un vecteur m lignes. Les notations qui suivent sont les mêmes que celles définies dans le cours.
Soit $\bar{x}$ un point extrême de P , associé à une partition (B,N) des indices des variables, tel que $\bar{x}_B = A_B^{-1} b > 0$.

1) Après avoir explicité $P - \{\bar{x}\}$, montrer que $F(\bar{x}) = \left\{u \in R^n: Au = 0,\ u_N \geq 0\right\}$.

2) Etant donné que $0^+ F(\bar{x}) = F(\bar{x})$, un élément non nul d'une face de dimension 1 de $F(\bar{x})$ est une direction extrême de $F(\bar{x})$ et réciproquement.
Montrer que $\bar{u}$ est une direction extrême de $F(\bar{x})$ ssi $\bar{u}$ est multiple positif de u tel que $\exists j \in N$ t.q. $u_B = -A_B^{-1} A_j$, $u_j = 1$, $u_{N-\{j\}} = 0$.
3) Montrer que $F(\bar{x})$ ne contient pas de droite. Donner la représentation interne de $F(\bar{x})$.

On admettra que étant donnés $\bar{x}$, $\bar{y}$ deux points extrêmes distincts de P: $[\bar{x}, \bar{y}]$ est une arête de P ssi $\bar{y} - \bar{x}$ est une direction extrême de $F(\bar{x})$.

Partie 3

On considère maintenant n=5, m=3, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&2&-1\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

1) Montrer que $\bar{x}$ est un point extrême de P. Donner la partition (B,N) des indices des variables qui lui est associée.
2) Déterminer les directions extrêmes de $F(\bar{x})$.
3) Déterminer le ou les points extrêmes de P liés à $\bar{x}$ par une arête.
4) Soit $c=\begin{pmatrix}0&0&1&-1&1\end{pmatrix}$.
a) Le maximum de cx sur P est-il borné?
b) $\bar{x}$ est-il solution (optimale) de minimiser cx sur P?
Si l'algorithme du simplexe passait par $\bar{x}$, quel point extrême donnerait-il juste après $\bar{x}$?

Problème 2

Soit le problème: minimiser $f(x)=-x_1^2+2x_1+x_2-1$ sous contraintes $\begin{cases}x_1+x_2\geq 1\\x_1-x_2\leq 2\\x_1\geq 0\\x_2\geq 0\end{cases}$

1) On considère les points réalisables $x'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $x''=\begin{pmatrix}x_1''\\x_2''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

a) Ces points sont-ils qualifiés?
b) Ces points satisfont-ils les conditions de Kuhn-Tucker?

2) On s'intéresse aux solutions réalisables vérifiant l'équation $x_2=x_1-2$. Quelle est la valeur optimale de f dans ce cas? Que peut-on en conclure?

Barème

Problème 1

Partie 1: 1) 0,5   2) 1   3) 1

Partie 2: 1) 3   2) 1,5   3) 1,5

Partie 3: 1) 0,5   2) 1   3) 2   4) 1

Problème 2

1) a) 1   b) 4

2) 2

Correction contrôle Optimisation Mathématique (14 Juin 96)

Problème1

Partie 1

1) $\bar{x},\bar{y}$ sont des points extrêmes (faces de dimension 0) de $[\bar{x},\bar{y}]$ qui est une face de P, donc par théorème $\bar{x},\bar{y}$ sont des points extrêmes (faces de dimension 0) de P.

2) - cône: $\alpha > 0$, $u \in F(\bar{x})$, alors $\frac{\varepsilon}{\alpha} > 0$, $\bar{x} + \frac{\varepsilon}{\alpha}(\alpha u) \in P$ donc $\alpha u \in F(\bar{x})$.
- convexe: $u_1, u_2 \in F(\bar{x})$, $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2$ positifs tels que $\bar{x} + \varepsilon_1 u_1, \bar{x} + \varepsilon_2 u_2 \in P$. Soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$, par convexité de P : $\bar{x} + \varepsilon u_1, \bar{x} + \varepsilon u_2 \in P$. Donc $(1-\lambda)(\bar{x} + \varepsilon u_1) + \lambda(\bar{x} + \varepsilon u_2) = \bar{x} + \varepsilon((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) \in P$ pour $0 \le \lambda \le 1$.

3) - soit $y - \bar{x} \in P - \{\bar{x}\}$. $(y - \bar{x}) + \bar{x} \in P$ donc $y - \bar{x} \in F(\bar{x})$.
Donc $P - \{\bar{x}\} \subseteq F(\bar{x})$ et d'après 2 $Cône(P - \{\bar{x}\}) \subseteq F(\bar{x})$.
- soit $u \in F(\bar{x})$. Par définition: $\exists \varepsilon > 0, \bar{x} + \varepsilon u \in P$. On en déduit $\varepsilon u \in P - \{\bar{x}\}$. Donc $u \in \frac{1}{\varepsilon}(P - \{\bar{x}\}) \subseteq Cône(P - \{\bar{x}\})$.

Partie 2

1) Etablissons d'abord:
$P - \{\bar{x}\} = \{x - \bar{x}: Ax = b,\ x \ge 0\} = \{u: A(u + \bar{x}) = b,\ u + \bar{x} \ge 0\} = \{u: Au = 0,\ u_B + \bar{x}_B \ge 0,\ u_N \ge 0\}$- on constate que: $P - \{\bar{x}\} \subseteq \{u: Au = 0,\ u_N \ge 0\}$. Mais de manière évidente $\{u: Au = 0,\ u_N \ge 0\}$ est un cône convexe, on en déduit: $Cône(P - \{\bar{x}\}) \subseteq \{u: Au = 0,\ u_N \ge 0\}$
- soit $u \in \{u: Au = 0,\ u_N \ge 0\}$. Si $u_B + \bar{x}_B \ge 0$ alors $u \in P - \{\bar{x}\} \subseteq Cône(P - \{\bar{x}\})$.
Sinon soit $B^- = \{i \in B:\ u_i + \bar{x}_i < 0\}$.
$\forall i \in B^-$, étant donnée l'hypothèse faite sur $\bar{x}$ on a: $u_i < -\bar{x}_i < 0$. $\exists \rho_i > 0\ -\bar{x}_i \le \rho_i u_i < 0$ (prendre par exemple $\rho_i = \frac{-\bar{x}_i}{u_i}$). Soit $\rho = \min_{i \in B^-}\{\rho_i\} > 0$ alors $\forall i \in B^-\ -\bar{x}_i \le \rho u_i$.
On remarque par ailleurs que $\rho < 1$, ce qui entraine $\bar{x}_i > \rho \bar{x}_i$ $(i \in B)$.
$\forall i \in B - B^-\ \ \rho > 0 \Rightarrow \rho(u_i + \bar{x}_i) \ge 0$, d'où $\rho u_i + \bar{x}_i \ge 0$.
Donc $\rho u_B + \bar{x}_B \ge 0$, mais $\rho u \in \{u: Au = 0,\ u_N \ge 0\}$ qui est un cône et finalement $\rho u \in P - \{\bar{x}\}$ d'où l'on déduit que $u \in \frac{1}{\rho}(P - \{\bar{x}\}) \subseteq Cône(P - \{\bar{x}\})$.

2) $\bar{u}$ direction extrême de $F(\bar{x})$ est dans une face de dimension 1. $\bar{u}$ sature n-1 contraintes linéairement indépendantes soient les m contraintes d'égalité ($Au = 0$) et au moins $(n-m)-1$ contraintes d'inégalité ($u_N \ge 0$). Mais si $\bar{u}$ sature les $n-m$ contraintes d'inégalité alors $\bar{u}_N = 0$ et par suite $\bar{u}_B = 0$. Donc $\exists j \in N$ tel que $\bar{u}_j = \varepsilon > 0, \bar{u}_{N-\{j\}} = 0$, Donc $A\bar{u} = A_B\bar{u}_B + A_N\bar{u}_N = A_B\bar{u}_B + \varepsilon A_j = 0$ ce qui donne $\bar{u}_B = -\varepsilon A_B^{-1}A_j$. On a bien $\bar{u} = \varepsilon u$ avec u vérifiant les conditions de l'énoncé.

3) Si $F(\bar{x})$ contient une droite de vecteur directeur u alors $u \in 0^+F(\bar{x})$ et $-u \in 0^+F(\bar{x})$ donc $u \in \left(0^+F(\bar{x})\right) \cap \left(-0^+F(\bar{x})\right) = \{u: Au = 0,\ u_N = 0\} = \{0\}$
$F(\bar{x})$ est sans droite et $F(\bar{x})$ contient un unique point extrême 0, par théorème $F(\bar{x}) = \{0\} + Cône\{d_1, \dots, d_s\}$ où les d_i sont les directions extrêmes de $F(\bar{x})$.

Partie 3

1) $B = \{1,2,3\}$, $N = \{4,5\}$, $A_B = I$, $\bar{x}_B = A_B^{-1}b = b \ge 0$, $\bar{x}_N = 0$. $\bar{x}$ vérifie les propriétés caractéristiques des points extrêmes de P (cf. cours).

2) On remarque $\bar{x}_B > 0$ et on applique les résultats précédents.

1er cas: j=4, $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 2è cas: j=5, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les directions extrêmes sont multiples positifs de ces deux directions.

3) Partant de $\bar{x}$, on se déplace le long d'une direction extrême de $F(\bar{x})$ jusqu'à rencontrer un point extrême $\bar{y}$. D'après la propriété admise, $[\bar{x},\bar{y}]$ est une arête de P.

1er cas: déplacement dans la direction u. On cherche $\lambda > 0$ maximum tel que $\bar{x}+\lambda u \in P$.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \lambda = \tfrac{1}{2}. \text{ Donc } \bar{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}.$$

2è cas: déplacement dans la direction v. On cherche $\lambda > 0$ maximum tel que $\bar{x}+\lambda v \in P$
On voit que λ est non borné. v est en fait une direction de P.

4) a) cv=2 et v direction de P donc maximum non borné.
b) cu=-2. De $\bar{x}$, en se déplaçant dans la direction u on trouve donc des points "meilleurs" que $\bar{x}$. Le meilleur point dans cette direction est $\bar{y}$ qui correspond au déplacement maximum. C'est le point que donnerait l'algorithme du simplexe après $\bar{x}$.

Problème 2

1) Numérotons les contraintes dans leur ordre d'arrivée par 1,2,3 et 4, et mettons les sous la forme $g_i(x)\leq 0$.
a) On vérifie les conditions de Slater:

$I(x')=\{1,4\}$. Les $g_i(x)$ (i=1 et 4) sont convexes, $x_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ les satisfait strictement.

$I(x'')=\{2,4\}$. Les $g_i(x)$ (i=2 et 4) sont convexes, $x_0=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ les satisfait strictement.

b) Les conditions de Kuhn-Tucker sont:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}-2x_1+2\\1\end{pmatrix}+u_1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+u_3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+u_4\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0\\ u_1(x_1+x_2-1)=0\\ u_2(x_1-x_2-2)=0\\ u_3x_1=0\\ u_4x_2=0\\ u_i\geq 0 \ \ i=1,\dots,4\end{cases}$$

Pour $x'=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: $\begin{cases}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+u_1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+u_4\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0\\ u_2=0\\ u_3=0\\ u_i\geq 0 \ \ i=1,\dots,4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_1=0\\ u_4=1\\ u_2=0\\ u_3=0\\ u_i\geq 0 \ \ i=1,\dots,4\end{cases}$ donc satisfaites.

Pour $x''=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$: $\begin{cases}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+u_4\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0\\ u_1=0\\ u_3=0\\ u_i\geq 0 \ \ i=1,\dots,4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_2=2\\ u_4=-1\\ u_1=0\\ u_3=0\\ u_i\geq 0 \ \ i=1,\dots,4\end{cases}$ donc non satisfaites.

2) $x_2=x_1-2$. La contrainte 1 devient: $x_1\geq\frac{3}{2}$. La contrainte 4 devient: $x_1\geq 2$. La contrainte 3 reste: $x_1\geq 0$. Finalement la condition la plus forte est: $x_1\geq 2$.

$f(x)$ devient $\bar{f}(x_1)=-x_1^2+3x_1-3$.

On constate que $min\{\bar{f}(x_1): x_1\geq 2\}$ n'existe pas puisque $\lim\limits_{x_1\to+\infty}\bar{f}(x_1)=-\infty$.

Ceci montre que les conditions de Kuhn-Tucker dans le cas non convexe ($f(x)$ est concave) ne sont que des conditions nécessaires. Le point x' n'est certes pas un minimum global du problème. Cependant c'est un minimum local c'est pourquoi il vérifie les conditions de Kuhn-Tucker. Par contre on est sûr que x'' n'est pas un minimum local.

Sujet de Septembre 2005

OPTIMISATION MATHÉMATIQUE

Durée : **1h30mn**
Documents autorisés : **Cours et TD**
Calculatrices **interdites**

Nom :

I. *(3 points)* Soient $n \geq 2$ et $x_1, ..., x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

[redacted]. Soit l'ensemble $X = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1 \, , \, x_1 + x_2 \geq 1\right\}$.
On se propose de résoudre le problème (P) : $\min_{x \in X} 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2$.

(1) *(2 points)* Démontrer que tous les points de X sont qualifiés. (on utilisera la qualif. de l'indépendance linéaire).
(2) *(3 points)* Déterminer l'ensemble des points de X qui vérifient les conditions de Khun et Tucker.
(3) *(4 points)* Parmi les points trouvés à la question précédente, donner ceux qui vérifient les conditions nécessaires du deuxième ordre.
(4) *(2 points)* Donner la ou les solutions optimales de (P) (on justifiera l'existence d'un minimum global).

M.q. l'unique point qui satisfait les conditions nécessaires du 2e ordre est un min. local strict.

I. Soit $n \geq 2$ et $x > 0$

on a $X = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq \left(\frac{x_n}{\delta_n x_1}\right)^{\delta_n} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{x_i}{\delta_i x_{i-1}}\right)^{\delta_i}$

pour tout δ tq : $\delta > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$.

On prend $\delta_i = \frac{1}{n}$ $\forall i$.

D'où : $X \geq \left(\frac{n x_n}{x_1}\right)^{1/n} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{n x_i}{x_{i+1}}\right)^{1/n} = \left(n^n\right)^{1/n} = n$.

II. (1) $g_1(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, $g_2(x) = 1 - x_1 - x_2$.

$\nabla g_1(x) = -2x$ et $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Cas où les 2 contraintes sont saturées

Si les gradients sont liés alors $x_3 = 0$ et $x_1 = x_2$, donc $x = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\0\end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Or ce n'est pas admissible et $2\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Tous les points sont qualifiés. $\Rightarrow$ Les conditions K.T. sont des conditions nécessaires d'optimalité

Cas où une contrainte est saturée

$\nabla g_1(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ qui n'est pas admissible

$\nabla g_2(x) \neq 0$ $\forall x$

(2) K.T.

$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + \lambda_2(1 - x_1 - x_2)$.

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \nabla L(x, 0) = \begin{pmatrix}4x_1\\6x_2\\2x_3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0$ non admissible.

(b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_1(4 - 2\lambda_1) - \lambda_2 = 0 \\ x_2(6 - 2\lambda_1) - \lambda_2 = 0 \\ x_3(1 - \lambda_1) = 0 \end{cases}$

On a : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (et $x_1 + x_2 \geq 1$)

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 3 \Rightarrow x = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1 \Rightarrow x = \pm\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ pas admissible.

(c) $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 4x_1 - \lambda_2 = 0 \\ 6x_2 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$

On a : $x_1 + x_2 = 1$ donc $\frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_2}{6} = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{12}{5}$.

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ pas admissible car $\frac{9}{25} + \frac{4}{25} < 1$.

② $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1(4 - 2\lambda_1) = \lambda_2 \\ x_2(6 - 2\lambda_1) = \lambda_2 \\ x_3(1 - \lambda_1) = 0 . \end{cases}$

On a $x_1 + x_2 = 1$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

si $x_3 = 0$ alors $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et alors $\lambda_2 = 0$ (impossible).

Donc $x_3 \neq 0$ et $\lambda_1 = 1$. Donc $x_1 + x_2 = 1 = \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{4} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{4}{3}$.

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \pm\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ car $x_3^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

III. Restent donc quatre points : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2, 0\right), \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 3, 0\right), \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \pm\frac{2}{3} \end{pmatrix}, 1, \frac{4}{3}\right)$.

Les points sont qualifiés (par l'indépendance linéaire) donc on peut utiliser $F^+(x) = T(S^+(x), x)$.

$F^+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \{ y : -2y_1 = 0$ et $-y_2 - y_1 \leq 0 \} = \{ y : y_1 = 0, y_2 \geq 0 \}$.

$F^+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \{ y : -2y_2 = 0$ et $-y_2 - y_1 \leq 0 \} = \{ y : y_1 \geq 0, y_2 = 0 \}$.

Or $H_L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 4 - 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 - 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 2\lambda_1 \end{pmatrix}$.

En prenant $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient $y^T H_L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2, 0\right) y = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= -2 < 0$.

et : $y^T H_L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 3, 0\right) y = (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= -4 < 0$.

on a : $H_L\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \pm\frac{2}{3} \end{pmatrix}, 1, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq_L 0$.

Donc en particulier sur le cône tangent à $S^+(x^*)$ en x^*.

min global

IV. On a $2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ et même $Hf(x) >_L 0$.

l'ens. $D = \begin{cases} 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 \leq \frac{15}{9} & (1) \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$

est un compact (fermé, borné en raison de (1)).

mais $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2$ est atteint en un point $x^* \in D$ car f continue

le point x^* est nécessairement $\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ \pm 2/3 \end{bmatrix}$

On a $F^+\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \pm\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \{ y : \frac{4}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2 \pm \frac{4}{3} y_3 = 0$ et $y_1 + y_2 = 0 \}$

donc y est de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \pm\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$. ((on peut se ramener sur un compact et f continue.

Or : $\left(\alpha\ \ -\alpha\ \ \pm\frac{\alpha}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \pm\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = 6\alpha^2 > 0$ pour $\alpha \neq 0$.

$\Rightarrow$ min local strict $\Rightarrow$ global.

5 $\quad$ 11 pts

Optimisation d'une forme quadratique sur la sphère unité

Soit le problème (P) : minimiser $f(x) = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

sous la contrainte $h(x) = \|x\|^2 - 1 = 0$

1) Ecrire les conditions de Kuhn-Tucker. Résoudre ces conditions avec comme multiplicateur de Lagrange $\mu = 2$.

2) En utilisant les conditions d'optimalité du 2ᵉ ordre, montrer que la solution obtenue en 1) est un minimum local strict de (P).

3) En utilisant l'inégalité $x \cdot Ax \geq d\|x\|^2$ où d est la plus petite valeur propre de A matrice réelle, symétrique, montrer que la solution obtenue en 1) est la solution de (P).

1)
$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\cancel{2}x_2 - \cancel{2}x_3 \\ -\cancel{2}x_1 - \cancel{2}x_3 \\ -\cancel{2}x_1 - \cancel{2}x_2 \end{bmatrix}}_{\nabla f} + \mu \underbrace{\begin{bmatrix} \cancel{2}x_1 \\ \cancel{2}x_2 \\ \cancel{2}x_3 \end{bmatrix}}_{\nabla h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
1 pt

$$\mu = 2 \quad \to \begin{cases} -x_2 - x_3 + 2x_1 = 0 & (1) \\ -x_1 - x_3 + 2x_2 = 0 & (2) \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow x_1 - x_2 - 2x_2 + 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

en reportant dans (3) $\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$

$\|x\|^2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ 1 pt.

2) $x^* = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ $\quad F^+(x^*) = \{y : \nabla h(x^*) \cdot y = 0\} = \{y : y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$ $\quad$ 1 pt

Le hessien de la fonction de Lagrange est défini positif sur $F^+(x^*)$. En effet :

$$\frac{1}{2}(Hf + \mu Hh) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
1 pt

$$(y_1\ y_2\ y_3)\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3$$
$$= 3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 - (y_1 + y_2 + y_3)^2$$
$$= 3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 \text{ sur } F^+(x^*)$$
nul ssi $y_1 = y_2 = y_3 = 0$

2 pts

méthode de la base : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de $F^+(x^*)$

$$y = d_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$(d_1\ d_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{matrix}$$

3) Si on prend x vecteur propre associé à d ~~et~~ de norme 1, on a $x \cdot Ax = d\|x\|^2 = d$ qui est donc la valeur minimale que $x \cdot Ax$ peut atteindre sur la sphère unité. $\}$ 1 pt

Ici $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 1 pt $\quad$ calculons ses valeurs propres : $\det(A - dI) = \begin{vmatrix} -d & -1 & -1 \\ -1 & -d & -1 \\ -1 & -1 & -d \end{vmatrix} = -d(d^2-1) + (d-1) - (1-d)$
$= (d-1)(-d(d+1)+2) = (d-1)^2(-d-2)$

valeurs propres $= \{1, -2\}$ $\quad$ 2 pts

Donc le minimum de $x \cdot Ax$ sur $\|x\|^2 = 1$ vaut -2.

Or la solution trouvée en 1) donne aussi -2 $\quad f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = -2$. $\quad$ 1 pt.