Problème perturbé (8 points)

Soit (P_b) : $\min f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ s.c. $x_1 + x_2 \geq b$ avec $b \geq 0$

1) Calculer la fonction duale.

$$\theta(\lambda) = \min_x \; x_1^2 + x_2^2 + \lambda(b - x_1 - x_2)$$

Le pb de minimisation est convexe donc on cherche simplement un point critique :

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda = 0 \\ 2x_2 - \lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\lambda}{2} \\ x_2 = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

2 $\theta(\lambda) = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda b - \lambda^2 = -\frac{\lambda^2}{2} + \lambda b$ (noter que $\theta(\lambda)$ est concave)

2) Résoudre le pb dual

$$\max_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda)$$

cherchons un point critique, s'il est positif ou nul ce sera bon :

$-\lambda + b = 0 \Rightarrow \lambda = b$ comme $b \geq 0$ c'est bon.

2 on obtient $\max = \theta(b) = -\frac{b^2}{2} + b^2 = \frac{b^2}{2}$

3) Prenons $x_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{b}{2}$

$x_2 = \frac{\lambda}{2} = \frac{b}{2}$

$x_1 + x_2 \geq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \geq b$ contrainte satisfaite.

$f\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{2}$

on a $f\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) = \theta(b)$ pas de saut de dualité.

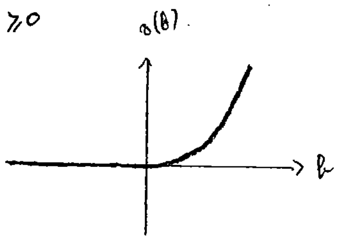
2 donc $x_1 = \frac{b}{2}$, $x_2 = \frac{b}{2}$ est solution de (P)

4) Pour $b \leq 0$, on prend $x_1 = x_2 = 0$ et le min de f vaut 0

donc $v(b) = 0$ pour $b \leq 0$

$v(b) = \frac{b^2}{2}$ pour $b \geq 0$

2



on voit que $v(b)$ est bien convexe.

(P) : $\min \; f = x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$ s.c. $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leq 1$

Soit $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

1) M.q. x^* est qualifié : x^* sature la contrainte $I(x^*) = \{1\}$

2 $\nabla g = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $\nabla g(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Vecteur non nul donc linéairement indépendant

On applique le critère de qualification de l'indépendance linéaire.

2) M.q. x^* vérifie K.T.

2 K.T. $\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ \lambda g(x^*) = 0 \end{cases}$ $\nabla f = \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow$ KT devient $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 1$

Ici K.T. ne sont pas des conditions suffisants d'optimalité car f n'est pas convexe.

2 En effet $H_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ la forme quadratique associée (qui n'est autre que f) peut prendre des valeurs négatives.

par exemple avec $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 = 1$ on obtient $y \cdot H_f\, y = -2$

$-\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont vecteurs propres de $\lambda = 1$ donc double. Trace $= 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow$ la dernière valeur propre est $+2$

3) On considère $\mathcal{L}(x^*, 1) = f(x) + g(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)^2 - 1$ écrit comme ceci on voit que c'est convexe par composition de fonctions affine $(x_1 + x_2 - x_3)$ et convexe ξ^2

a) M.q. $\mathcal{L}(x, 1)$ est convexe.

2 $H_{\mathcal{L}}(x, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Cherchons les valeurs propres de cette matrice. $\det\left(H_{\mathcal{L}}(x, 1) - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & -1 \\ 1 & (1-\lambda) & -1 \\ -1 & -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2(-\lambda + 3)$

il y a 2 racines : $\lambda = 0$ et $\lambda = 3$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont vecteurs propres de $\lambda = 0$ donc double. donc $H_{\mathcal{L}}(x, 1)$ est semi-définie positive et $\mathcal{L}(x, 1)$ est convexe.

Trace $= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \Rightarrow$ l'autre valeur propre est 3

b) M.q. $(x^*, 1)$ est un point selle.

3 caractéristiques à vérifier : $\mathcal{L}(x, 1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3)^2 - 1 \Rightarrow \mathcal{L}(x, 1) \geq -1$ et $\mathcal{L}(x^*, 1) = -1$

1) x^* minimise $\mathcal{L}(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}^3$. Or x^* satisfait K.T. c'est-à-dire $\nabla \mathcal{L}(x^*, 1) = 0$

donc x^* est un point critique de $\mathcal{L}(x, 1)$ qui est convexe

donc c'est le minimiseur global de $\mathcal{L}(x, 1)$

2 2) $g(x^*) = \frac{1}{2}(0 + 1 + 1) - 1 = 1 - 1 \leq 0$ contrainte satisfaite

3) $\lambda g(x^*) = 1 \times 0 = 0$

conclusion x^* est solution de (P)

4) Autres solutions de (P).

Le point x^* donne $f(x^*) = -1$

Le point $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ donne aussi -1 et satisfait la contrainte.

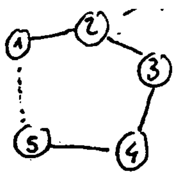
Considérons des points de la forme $x_3 = x_1 + x_2$

Reportons dans (P) : $\min \; f = x_1x_2 - x_1(x_1 + x_2) - x_2(x_1 + x_2)$ s.c. $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2) \leq 1$

2 ce qui donne $\min \; f = -x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2$ s.c. $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \leq 1$

de la contrainte, il résulte $-x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 \geq -1$

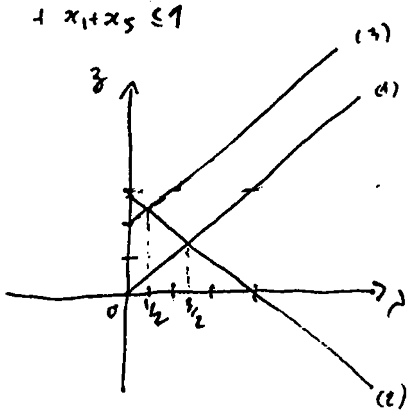
donc $f \geq -1$ et les points satisfaisant $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 1$ sont solutions de (P)



polytope des stables de ①-②-③-④-⑤

$$\min_{\lambda \geq 0} \max_{x \in X} x_1 + x_2 + \dots + x_5 + \lambda(1 - x_1 - x_5)$$

$+\ x_1 + x_5 \leq 1$



$\min z$ s.c. $z \geq 0 + \lambda$ $\quad x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 0$ (1)

$\lambda \geq 0$

$\rightarrow z^* = 0$

$\lambda^* = 0$

$\max_{x \in X} x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 3$ pour $x_1 = x_3 = x_5 = 1$

$\min z$ s.c. $z \geq \lambda$ $\quad x_1 = \dots = x_5 = 0$ (1)

$z \geq 3 - \lambda$ $\quad x_1 = x_3 = x_5 = 1$ (2)

$z^* = \frac{3}{2}$ $\lambda^* = \frac{3}{2}$

$\max_{x \in X} x_1 + \dots + x_5 + \frac{3}{2}(1 - x_1 - x_5) = -\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 - \frac{x_5}{2} + \frac{3}{2} = 2 +$

pour $x_2 = x_4 = 1$

$\min z$ s.c. $z \geq \lambda$ (1)

$z \geq 3 - \lambda$ (2)

$z \geq 2 + \lambda$ (3)

$\lambda^* = \frac{1}{2}$ $z^* = 2,5$

$\max_{x \in X} x_1 + \dots + x_5 + \frac{1}{2}(1 - x_1 - x_5) = \frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + \frac{x_5}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

pour $x_2 = x_4 = 1$

ou $x_1 = x_3 = 1$

$z^* = 2,5$ STOP

contrôle MOM 2009

durée 1h. documents autorisés. Pas de calculette.

exercice : conditions de Kuhn-Tucker, dualité.

Soit le problème suivant :

(P) $\min_{(x_1,x_2)\in R^2} f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ sous la contrainte $2x_1+x_2\leq -4$

1) Conditions de Kuhn-Tucker.

a) Résoudre les conditions de Kuhn-Tucker.

b) Sont-elles des conditions suffisantes d'optimalité dans le cas de (P) et pourquoi ?

c) En déduire x^* la solution de (P) et calculer $f(x^*)$.

2) Dualité.

On note $\theta(\lambda)=\min_{(x_1,x_2)\in R^2} x_1^2+x_2^2+\lambda(2x_1+x_2+4)$ la fonction duale.

a) Donner l'expression de $\theta(\lambda)$ en fonction de λ uniquement. Vérifier que θ est concave.

b) Enoncer (D) le problème dual de (P) et le résoudre.

c) Soit λ^* la solution optimale de (D). Calculer $\theta(\lambda^*)$. Existe-t-il un saut de dualité entre (P) et (D) ?

Dualité lagrangienne.

Soit (P) minimiser $x_1^2 + x_2^2$ sous la contrainte $2x_1 + x_2 \leq -4$ $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

1) Expliciter la fonction duale

$L(x_1, x_2, u) = x_1^2 + x_2^2 + u(2x_1 + x_2 + 4)$ Lagrange.

$\theta(u) = \inf\{L(x_1, x_2, u) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ fction duale

pb de minimisation sans contrainte : écrivons que le minimum est un point critique.

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2x_1 + 2u = 0$ $x_1 = -u$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2x_2 + u = 0$ $x_2 = -\frac{u}{2}$

$L(x_1, x_2, u)$ étant ici convexe ~~en~~ les variables x_1, x_2 $\left(\text{Hessien} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ le point est un minimum global.

$$\Rightarrow \theta(u) = u^2 + \frac{u^2}{4} + u\left(-\frac{5}{2}u\right) + 4u = -\frac{5}{4}u^2 + 4u$$

2) résoudre le pb dual

(D) est maximiser $\theta(u)$ sous la contrainte $u \geq 0$

$\theta'(u) = -\frac{5}{2}u + 4 = 0 \Rightarrow u = \frac{8}{5} \geq 0$ point critique. La fonction duale étant concave c'est nécessairement le maximum de la fonction.

3) en déduire la solution du primal (P).

$\inf\{L(x_1, x_2, \frac{8}{5}) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ est réalisé en un point unique.

si il y a un point selle, ce point est solution de (P).

(P) admet un point selle par théorème.
- f convexe, g convexe.
- ~~[illegible]~~ plus de superconsistence à vérifier :
- $\exists \hat{x}$ $g(\hat{x}) < 0$

ce point est donné par $x_1 = -u = -\frac{8}{5}$

$x_2 = -\frac{4}{5}$

il vérifie la contrainte de (P), $x_1^2 + x_2^2 = \frac{8^2}{5^2} + \frac{4^2}{5^2} = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$

$\theta(\frac{8}{5}) = -\frac{\cancel{5}}{4}\frac{8^2}{5^{\cancel{2}}} + \frac{4 \cdot 8}{5} = \frac{-16+32}{5} = \frac{16}{5}$

Dualité lagrangienne.

Un randonneur prépare avec soin le contenu de son sac-à-dos. Le poids total de nourriture emportée ne pourra pas excéder 4 kg. Il dispose de 3 aliments de valeurs nutritives et de poids différents

aliments	1	2	3
poids (kg)	2	3	4
valeur nutritive	3	2	1

Le randonneur cherche quels aliments emporter de façon à maximiser la valeur nutritive totale sans toutefois dépasser un poids total de 4 kg.

1) M.q. le problème du randonneur peut se formuler comme le pb (P) en variables 0-1 suivant :

$$\text{minimiser } f(x) = -3x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\text{s.c. } \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4 \quad \text{et} \quad x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3$$

2) On remarque que le min d'une fonction linéaire $\sum a_i x_i$ en variables 0-1 est simple à calculer : $\begin{cases} x_i = 0 & \text{si } a_i > 0 \\ x_i = 1 & \text{si } a_i < 0 \\ x_i = 0 \text{ ou } 1 & \text{si } a_i = 0 \end{cases}$. C'est pourquoi, l'on considère (D) le problème dual de (P) suivant :

$$\text{maximiser } \theta(\lambda) = \inf_{x \in X} \{-3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4)\}$$
$$\text{s.c. } \lambda \geq 0$$

où $X = \{0,1\}^3 = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), \dots, (1,1,1)\}$ triplets (x_1, x_2, x_3)

a) Résoudre (D) par la méthode des plans sécants en partant de $X^{(0)} = \{(0,0,0), (1,1,0)\}$. On résoudra le pb maître graphiquement en représentant dans le plan λ, z les différents "plans sécants" induits par les contraintes du pb maître.

b) Soit λ^* la solution de (D). Le dernier sous-problème admet 2 solutions. Montrer que, quelque soit x^* une de ces 2 solutions, (x^*, λ^*) n'est pas un point selle.

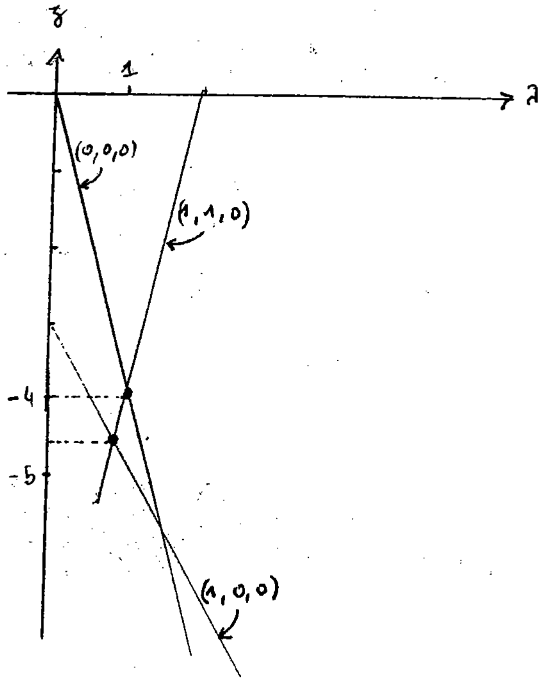
Correction

1) maximiser $3x_1 + 2x_2 + x_3$ s.c. $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4$ et $x_i \in \{0, 1\}$ $i = 1, 2, 3$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ssi l'objet } i \text{ est mis dans le sac} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\max\{3x_1 + 2x_2 + x_3\} \Leftrightarrow -\min\{-3x_1 - 2x_2 - x_3\}$$

2)a) <u>itération $k = 0$</u>



pb maître : maximiser z

$$\text{s.c.} \begin{cases} z \leq -4d & (0,0,0) \\ z \leq -5 + d & (1,1,0) \\ d \geq 0 \end{cases}$$

maximum pour $z^{(0)} = -4$, $d^{(0)} = 1$

2pts sous-problème : $z^* = \min\limits_{x \in \{0,1\}^3} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4)$

$$= \min_{x \in \{0,1\}^3} -x_1 + x_2 + 3x_3 - 4 = -5$$

solution $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ $\qquad z^{(0)} > z^*$

<u>itération $k = 1$</u>

pb maître : maximiser z

2pts
$$\text{s.c.} \begin{cases} z \leq -4d & (0,0,0) \\ z \leq -5 + d & (1,1,0) \\ z \leq -3 - 2d & (1,0,0) \\ d \geq 0 \end{cases}$$

maximum pour $z^{(1)} = -\frac{13}{3}$, $d^{(1)} = \frac{2}{3}$

sous-problème : $z^* = \min\limits_{x \in \{0,1\}^3} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + \frac{2}{3}(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4)$

$$= \min_{x \in \{0,1\}^3} -\frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3} = -\frac{13}{3}$$

solutions $\begin{cases} x_1 = 1, \ x_2 = x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 = 1, \ x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad z^{(1)} = z^*$ STOP

b) pour $x^* = (1, 0, 0)$, $d^* = \frac{2}{3}$ $\quad$ (x^*, d^*) n'est pas un point selle la condition de complémentarité 3) n'est pas vérifiée : $(2 - 4) \times \frac{2}{3} \neq 0$.

pour $x^* = (1, 1, 0)$, $d^* = \frac{2}{3}$ $\quad$ (x^*, d^*) n'est pas un point selle car la condition de réalisabilité n'est pas vérifiée : $2 + 3 > 4$

Un randonneur prépare avec soin le contenu de son sac-à-dos. Le poids total de nourriture emportée ne pourra pas excéder 4 kg. Il dispose de 3 aliments de valeurs nutritives et de poids différents

aliments	1	2	3
poids (kg)	2	3	4
valeur nutritive	3	2	1

Le randonneur cherche quels aliments emporter de façon à maximiser la valeur nutritive totale sans toutefois dépasser un poids total de 4 kg.

1) M.q. le problème du randonneur peut se formuler comme le pb (P) en variables 0-1 suivant :

$$\text{minimiser} \quad f(x) = -3x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$\text{s.c.} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4 \quad \text{et} \quad x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3$$

2) On remarque que le min d'une fonction linéaire $\sum a_i x_i$ en variables 0-1 est simple à calculer : $\begin{cases} x_i \leftarrow 0 & \text{si } a_i > 0 \\ x_i \leftarrow 1 & \text{si } a_i < 0 \\ x_i \leftarrow 0 \text{ ou } 1 & \text{si } a_i = 0 \end{cases}$. C'est pourquoi, l'on considère (D) le problème dual de (P) suivant :

$$\text{maximiser} \quad \theta(\alpha) = \operatorname*{Inf}_{x \in X} \{-3x_1 - 2x_2 - x_3 + \alpha(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4)\}$$
$$\text{s.c.} \quad \alpha \geq 0$$

où $X = \{0,1\}^3 = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), \dots, (1,1,1)\}$ triplets (x_1, x_2, x_3)

a) Résoudre (D) par la méthode des plans sécants en partant de $X^{(0)} = \{(0,0,0), (1,1,0)\}$.
On résoudra le pb maître graphiquement en représentant dans le plan α, z les différents "plans sécants" induits par les contraintes du pb maître.

b) Soit α^* la solution de (D). Le dernier sous-problème admet 2 solutions. Montrer que, quelque soit x^* une de ces 2 solutions, (x^*, α^*) n'est pas un point selle.

3) On considère le pb (P′) suivant :

$$\text{minimiser} \quad f(x)$$
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4 & (1) \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 & (2) \\ -x_1 \leq 0, \ -x_2 \leq 0, \ -x_3 \leq 0 & (3),(4),(5) \end{cases}$$

a) Soit S l'ensemble des solutions réalisables de (P), S′ l'ensemble des solutions réalisables de (P′)
Donner S en extension puis vérifier que $S \subset S'$.
En déduire que si x^* est une solution de (P′) t.q. $x^* \in S$, alors x^* est solution de (P).

b) On considère $x^* = (1,0,0)$. Donner $I(x^*)$ en désignant les inégalités par leurs numéros indiqués ci-dessus.

c) M.q. $x^* = (1,0,0)$ vérifie les conditions de Kühn-Tücker (relatives à (P′)). Peut-on en déduire que x^* est solution de (P′). Si oui, en déduire la solution de (P).

4) On a résolu les problèmes (D) (question 2) et (P) (question 3). Que constate-t-on quant aux valeurs de ces problèmes. Le problème (P) admet-il un point selle ?

[illegible] a) $S = \{$[illegible]$, (0,1,0), (0,0,1)\}$ Il est facile de vérifier que $S \subset S'$

On a : $f(x^*) = \min_{S'} f(x) \leq \min_{S} f(x) \leq f(x^*)$

x^* solution de (P') $\quad S \subset S' \quad x^* \in S$

et donc $f(x^*) = \min_{S} f(x)$ i.e x^* solution de (P)

1 pt

autre correction :
si x^* pas solution de $(P) \rightarrow$
$\exists \bar{x} \in S$ t.q. $f(\bar{x}) < f(x^*)$
or $\bar{x} \in S'$ et donc x^* pas solution de (P')

b) $x^* = (1,0,0) \rightarrow I(x^*) = \{2, 4, 5\}$

c) K.T. $\begin{cases} -3 + d_2 = 0 \\ -2 + d_2 - d_4 = 0 \\ -1 + d_2 - d_5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d_2 = 3 \\ d_4 = 1 \\ d_5 = 2 \end{cases}$ positifs ou nuls donc x^* vérifie Kuhn.Tucker. 1 pt

Les fonctions associées aux contraintes 2, 4, 5 sont affines donc convexes, f est linéaire donc convexe donc les conditions K.T. sont des <u>conditions suffisantes</u> d'optimalité. 1 pt

x^* est solution de (P') et de plus on constate qu'il appartient à S (ses coordonnées sont 0 ou 1)
D'après a) x^* est solution de (P).

4) La valeur de $(D) = -\frac{13}{3}$, la valeur de $(P) = -3$
On a $-\frac{13}{3} < -3$
(P) ne peut admettre de point selle sinon les valeurs de (D) et (P) coïncideraient
(cf. théorème dualité forte)

Dualité lagrangienne

4th June 2007

On considère le problème:
(P) min $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ s.c. $\{x_1 + x_2 \geq 1\,,\, x_1 - 2x_2 \leq -1$
où $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

1) Mettre le problème (P) sous la forme : $\min f(x_1, x_2)$ s.c. $\{g_1(x_1, x_2) \leq 0\,,\, g_2(x_1, x_2) \leq 0$.

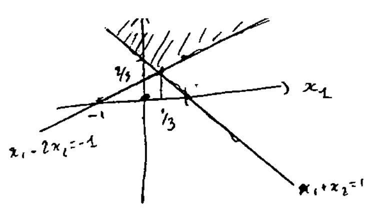
2) Associer aux contraintes respectivement les 2 multiplicateurs λ_1, λ_2. Exprimer la fonction duale $\Theta(\lambda_1, \lambda_2)$ en fonction de λ_1, λ_2.

3) Donner l'expression du problème (D) dual de (P). Résoudre (D) à l'aide des conditions nécessaires du premier ordre (Kuhn-Tucker) sans rechercher la qualification. Sont-elles suffisantes dans ce cas?

4) Montrer que le point $((x_1^*, x_2^*), (\lambda_1^*, \lambda_2^*))$ avec $x_1^* = \frac{1}{3}$, $x_2^* = \frac{2}{3}$, $\lambda_1^* = \frac{8}{9}$, $\lambda_2^* = \frac{2}{9}$, est un point selle pour la fonction de Lagrange. En déduire la solution de (P).

(P) $\min \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{f}$ s.c. $\underbrace{x_1 + x_2 \geq 1}_{g_1}$

$\underbrace{x_1 - 2x_2 \leq 1}_{g_2}$



$$\mathcal{L} = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 (1 - x_1 - x_2) + \lambda_2 (+1 + x_1 - 2x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{2} \end{array}\right.$$ ← calcul de l'$\operatorname{Inf}_x \mathcal{L}(x,\lambda)$

fonction duale :

$$\theta(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{4} + \frac{(\lambda_1+2\lambda_2)^2}{4} + \lambda_1\left(1 - \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1+2\lambda_2}{2}\right) + \lambda_2\left(1 + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} - (\lambda_1+2\lambda_2)\right)$$

$$= \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_1^2+4\lambda_2^2+4\lambda_1\lambda_2}{4} + \lambda_1\left(1 - \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2}\right) + \lambda_2\left(1 - \frac{\lambda_1}{2} - \frac{5\lambda_2}{2}\right)$$

$$= \lambda_1^2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1\right] + \lambda_2^2\left[\frac{1}{4}+1-\frac{5}{2}\right] + \lambda_1\lambda_2\left[-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right] + \lambda_1 + \lambda_2$$

$$= \lambda_1^2\left(-\frac{1}{2}\right) + \lambda_2^2\left[-\frac{5}{4}\right] + \lambda_1\lambda_2\left[-\frac{1}{2}\right] + \lambda_1 + \lambda_2$$

$$H_\theta = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -5/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \Delta_1 = -1, \quad \Delta_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} > 0$$

$\Leftrightarrow$ définie négatif $\Leftrightarrow$ θ est bien concave et même strictement

Résolution du pb dual :

(D) $\max \theta(\lambda_1,\lambda_2)$ s.c. $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \min -\theta(\lambda_1,\lambda_2)$ s.c $-\lambda_1 \leq 0$, $-\lambda_2 \leq 0$ où μ_1, μ_2 sont multiplicateurs associés à $-\lambda_1 \leq 0$, $-\lambda_2 \leq 0$

on écrit K.T. $\left\{\begin{array}{l} +\lambda_1 + \lambda_2 \times \frac{1}{2} - 1 - \mu_1 = 0 \\ \lambda_2 \frac{5}{2} + \lambda_1 \times \frac{1}{2} - 1 - \mu_2 = 0 \end{array}\right.$

$-\theta$ est convexe donc les conditions sont suffisantes.

$\mu_1 = \mu_2 = 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} = 1 \\ \lambda_2 \frac{5}{2} + \frac{\lambda_1}{2} = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} = 1 \\ 5\lambda_2 + \lambda_1 = 2 \end{array}$ $\Rightarrow 5\lambda_2 - \frac{\lambda_2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{2}\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2}{9} \Rightarrow \lambda_1 + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{8}{9}$

on a trouvé une solution, comme $-\theta$ est strictement convexe, elle est unique donc on peut s'arrêter là.

$$\theta\left(\frac{8}{9},\frac{2}{9}\right) = \frac{8^2}{9\times 9}\times\left[-\frac{1}{2}\right] + \frac{2^2}{9^2}\left[-\frac{5}{4}\right] + \frac{8\times 2}{9^2}\left[-\frac{1}{2}\right] + \frac{8}{9} + \frac{2}{9}$$

$$= -\frac{8\times 4}{9^2} - \frac{5}{9^2} - \frac{8}{9^2} + \frac{10\times 9}{9\times 9} = \frac{45}{9^2} = \frac{5}{9}$$

point qui réalise $\operatorname{Inf}_x \mathcal{L}(x, \frac{8}{9}, \frac{2}{9})$

$$X\left(\frac{8}{9},\frac{2}{9}\right) = \left\{\left(\frac{8-2}{9\times 2}, \frac{8+4}{9\times 2}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{6}{9\times 2}, \frac{12}{9\times 2}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$$

$f\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ OK coïncide avec $\theta(8/9, 2/9)$

$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ vérifie contraintes ? $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, $\frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{3}{3} = -1$ OK.

contraintes saturées donc complémentarité satisfaite.

vérifier que le gradient de $\theta = 0$ car $\begin{bmatrix} g_1(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \\ g_2(1/3, 2/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un sous-gradient de θ en $\left(\frac{8}{9},\frac{2}{9}\right)$, c'est en fait le gradient de θ comme $X(8/9, 2/9)$ est le singleton $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

Le point $\left(\underbrace{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}_{x}, \underbrace{\frac{8}{9},\frac{2}{9}}_{\lambda}\right)$ est bien un point selle de la fonction de Lagrange.

On considère le pb : (P) $\min\limits_{t_1,t_2,t_3>0} \; g(t_1,t_2,t_3) = \dfrac{40}{t_1t_2t_3} + 40\, t_2 t_3$ s.c. $2t_1t_3 + t_1t_2 \leq 4$

C'est un programme géométrique soumis à une contrainte.

On considère maintenant le pb dual de (P) : (D) $\max\limits_{\lambda \geq 0} \; \theta(\lambda) = \operatorname{Inf}\limits_{t_1,t_2,t_3>0} \; g(t_1,t_2,t_3) + \lambda\,(2t_1t_3 + t_1t_2 - 4)$

1) Dans cette partie, nous allons expliciter la fonction duale $\theta(\lambda)$.

a) M.q. pour $\lambda = 0$, $\theta(\lambda) = 0$

b) Maintenant on considère $\lambda > 0$. On va résoudre le pb : $\min\limits_{t_1,t_2,t_3>0} g(t_1,t_2,t_3) + \lambda\,(2t_1t_3 + t_1t_2)$ pour $\lambda > 0$ fixé.

Notons que ce pb est un programme géométrique (sans contraintes) car $\lambda > 0$.

(PG) $\min\limits_{t_1,t_2,t_3>0} \dfrac{40}{t_1t_2t_3} + 40\,t_2t_3 + 2\lambda\, t_1 t_3 + \lambda\, t_1 t_2$

. Ecrire (DPG) le dual de (PG). Résoudre (DPG). En déduire la solution de (PG) (en fonction de λ)

c) Finalement donner l'expression de $\theta(\lambda)$

2) Résoudre (D) et en déduire la solution de (P) à partir du 1) b)

1) a) $\operatorname{Inf} \dfrac{40}{t_1t_2t_3} + 40\, t_2t_3$ avec $t_1, t_2, t_3 > 0$

En prenant $t_2t_3 = \dfrac{1}{t_1^{1/2}}$, on obtient $\dfrac{40}{t_1^{1/2}} + \dfrac{40}{t_1^{1/2}}$, lorsque $t_1 \to +\infty$ on obtient $\operatorname{Inf} = 0$.

$\min \sum_{i=1} x_i \quad s.c \quad \prod_{i=1} x_i = L$

$1 + \mu \prod_{i=1}^{n} x_i \times \frac{1}{x_i} - \lambda_i = 0 \quad$ et $\lambda_i x_i = 0$

$\to x_i + \mu L = 0 \to x_i = -\mu L$

$\to L = \prod_{i=1}^{n} -\mu L = (-\mu L)^n \to \frac{1}{?} = (-\mu)^n L^{n-1}$

---

p.130 résolution par dual

1) b) $\frac{40}{t_1t_2t_3} + 40\, t_2 t_3 + \lambda(2t_1t_3 + t_1t_2 - 4)$

$\uparrow \delta_1 \qquad \uparrow \delta_2 \qquad \uparrow \delta_3 \qquad \uparrow \delta_4$

$-\delta_1 + \delta_3 + \delta_4 = 0$

$-\delta_1 + \delta_2 + \delta_4 = 0$

$-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$

$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 1$

$\delta_1 = \frac{2}{5}$

$\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \frac{1}{5}$

$v = \left(\frac{40}{} \times \frac{5}{2}\right)^{2/5} (40 \times 5)^{1/5} (2\lambda \times 5)^{1/5} (\lambda \times 5)^{1/5} = 5 \times 20^{2/5} \times 40^{1/5} \times 2^{1/5} \times \lambda^{2/5}$
$= 5 \times 2 \times 10^{2/5} \times 10^{4/5} \times \lambda^{2/5}$

2) $\max \lambda^{2/5} \times 10^{8/5} - 4\lambda$

$\theta'(\lambda) = \frac{2}{5}\lambda^{2/5-1} \times 10^{8/5} - 4 = 0$

$\frac{2}{5}\lambda^{-3/5} \times 10^{8/5} = 4 \to \lambda^{-3/5} = 10^{5/5} \times 10^{-8/5} = 10^{-3/5}$

$\to \boxed{\lambda = 10}$

on en déduit la solution de (P) :

$10^{2/5} \times 10^{8/5} - 4 \times 10 = 10^2 - 4 \times 10 = 60$

$\frac{40}{t_1t_2t_3} = 100 \times \frac{2}{5} \qquad 40\, t_2t_3 = 100 \times \frac{1}{5} \qquad 20\, t_1t_3 = 100 \times \frac{1}{5} \qquad 10\, t_1t_2 = 100 \times \frac{1}{5}$

$t_2t_3 = 1/2 \qquad t_1t_3 = 1 \qquad t_1t_2 = 2$

$\frac{40}{t_3} \times \frac{1}{2} = 100 \times 2/5 \to t_3 = 40 \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{2}$

$\to t_2 = 1$

$\to t_1 = 2$

---

1) b) solution de (PG)

$\frac{40}{t_1t_2t_3} = \lambda^{2/5} \times 10^{8/5} \times \frac{2}{5} \qquad 40 t_2 t_3 = \lambda^{2/5} 10^{8/5} \times \frac{1}{5} \qquad 2\lambda t_1 t_3 = \lambda^{2/5} 10^{8/5} \times \frac{1}{5} \qquad \lambda t_1 t_2 = \lambda^{2/5} 10^{8/5} \times \frac{1}{5}$

$t_1 t_2 = \lambda^{-3/5} 10^{8/5} \times \frac{1}{5}$

$\frac{40}{t_3} = \lambda^{-3/5} \times 10^{8/5} \times \frac{1}{5} \times \lambda^{2/5} \times 10^{8/5} \times \frac{2}{5}$

$t_3 = 40 \times 5 \times 5 \times \lambda^{1/5} \times 10^{-16/5} \times \frac{1}{2} = 10^3 \times \lambda^{1/5} \times 10^{-16/5} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \times \lambda^{1/5} \times 10^{-1/5}}$

$t_2 = \underbrace{\lambda^{2/5} 10^{8/5} \times \frac{1}{5}}_{} \times \underbrace{\frac{2}{\lambda^{1/5} \times 10^{-1/5}}}_{} \times \frac{1}{40} = \lambda^{1/5} \times \frac{1}{200} \times 10^{9/5} \times \frac{1}{10} \times 2 = \boxed{\lambda^{1/5} \times 10^{-4/5}}$

$t_1 = \underbrace{\lambda^{2/5} 10^{8/5} \times \frac{1}{5}}_{} \times \underbrace{\frac{1}{2\lambda}}_{} \times \underbrace{\frac{2}{\lambda^{1/5} 10^{-1/5}}}_{} = \lambda^{-4/5} \times 10^{9/5} \times \frac{1}{10} \times 2 = \boxed{\lambda^{-4/5} \times 10^{4/5} \times 2}$

$$\frac{40}{} \partial^{\cdot\cdot} \times 10^{\cdot\cdot} + \frac{40}{2} \partial^{\cdot} \times 10^{\cdot\cdot} + \frac{2\partial}{\cancel{2}} \times \partial^{\cdot} \times 10 \times 2 + \partial \, \partial^{\cdot} \, 10^{\cdot} \, 2$$

$$\partial^{2/5} \left[40 \times 10^{-2/5} + 20 \times 10^{-2/5} + 10^{3/5} \times 2 + 2 \times 10^{3/5} \right]$$

$$\partial^{2/5} \, 10^{8/5} \left[40 \times 10^{-2/5 - 8/5} + 20 \times 10^{-2/5 - 8/5} + 2 \times 10^{3/5 - 8/5} + 2 \times 10^{3/5 - 8/5} \right]$$

$$\left[\underbrace{\frac{40}{100} + \frac{20}{100} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10}}_{1} \right] = \partial^{2/5} \, 10^{8/5}$$

la fonction objectif du primal est bien égale à la fonction objectif du dual.

<u>vérification</u>

<u>dérivée</u> :

$$- \frac{40}{(t_1 t_2 t_3)^2} \times t_2 t_3 + 2\partial t_3 + \partial t_2 = - \frac{40 \times \frac{1}{2} \partial^{2/5} 10^{-2/5}}{\left(\partial^{-2/5} 10^{2/5}\right)^2} + 2\partial \, \frac{1}{2} \, \partial^{1/5} \, 10^{-1/5} + \partial \, \partial^{1/5} \, 10^{-1/5} = 0$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2} \qquad - \frac{40}{(t_1 t_2 t_3)^2} t_1 t_3 + 40 t_3 + \partial t_1 = - \frac{40}{\left(\partial^{-2/5} 10^{2/5}\right)^2} \partial^{-3/5} 10^{3/5} + 40 \, \frac{1}{2} \times \partial^{1/5} 10^{-1/5} + \partial \, \partial^{-4/5} 10^{4/5} \, \cancel{2} = 0$$

$$- \frac{40}{(t_1 t_2 t_3)^2} t_1 t_2 + 40 t_2 + 2\partial t_1 = \frac{-40}{\left(\partial^{-2/5} 10^{2/5}\right)^2} \partial^{-3/5} 10^{3/5} \, 2 + 40 \, \partial^{1/5} 10^{-1/5} + 2\partial \, \partial^{-4/5} 10^{4/5} \, 2 = 0$$

Dualité (saut)

I. On considère le problème : $\min x_1^2 - x_2^2$ s.c. $(x_2-1)^2 = 0$

Donner l'expression de $\theta(\mu)$ la fonction duale pour tout μ.

Montrer que $\theta(\mu) < -1$ $\forall \mu$ et que le sup de $\theta(\mu)$ vaut -1

II. On considère maintenant le problème : $\min x_1^2 - x_2^2$ s.c. $x_2 - 1 = 0$

Que vaut $\theta(\mu)$ la fonction duale pour tout μ.

En déduire la valeur optimale du problème dual. Que constate-t-on par rapport à la valeur du primal ?

I. $\min x_1^2 - x_2^2$ s.c. $(x_2-1)^2=0$

$$\theta(\mu) = \operatorname{Inf} x_1^2 - x_2^2 + \mu(x_2-1)^2 = \operatorname{Inf} x_1^2 + \underbrace{(\mu-1)}_{\geq 0} x_2^2 - 2\mu x_2 + \mu$$

si $\mu \leq 1$ alors $\operatorname{Inf} = -\infty$

si $\mu > 1$ fction strict convexe $\rightarrow$ point critique $\rightarrow$ $2x_1 = 0$

$2(\mu-1)x_2 - 2\mu = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{\mu}{\mu-1}$

alors $\operatorname{Inf} = -\dfrac{\mu}{\mu-1}$

Donc $\theta(\mu) < -1$ $\forall \mu$ mais $\theta(\mu)$ tend vers -1 quand $\mu \to +\infty$ d'où le $\sup_\mu \theta(\mu) = -1$

II. $\min x_1^2 - x_2^2$ s.c. $x_2 - 1 = 0$

$$\theta(\mu) = \operatorname{Inf} x_1^2 - x_2^2 + \mu(x_2-1)$$

pas convexe et quand $x_2 \to \pm\infty$ l'inf $= -\infty$ $\forall \mu$.

donc $\forall \mu$ $\theta(\mu) = -\infty$

Et la valeur du dual est $-\infty$.

La valeur du primal est -1. Il y a donc un saut de dualité infini.

Sujet B

Dualité

I On considère le problème : $\min x_1^2 + x_2^2$ s.c. $(x_2 - 1)^2 = 0$

Donner l'expression de la fonction duale pour tout μ

Montrer que $\theta(\mu) < 1 \quad \forall \mu$ et que le sup de $\theta(\mu)$ vaut 1

II On considère maintenant le problème : $\min x_1^2 + x_2^2$ s.c. $x_2 - 1 = 0$

Donner l'expression de la fonction duale pour tout μ

Résoudre le pb dual et donner sa valeur optimale.

I $\min x_1^2 + x_2^2$ s.c. $(x_2 - 1)^2 = 0$

$\theta(\mu) = \operatorname{Inf} \; x_1^2 + x_2^2 + \mu (x_2 - 1)^2 = \operatorname{Inf} \; x_1^2 + \underbrace{(\mu+1)}_{\geq 0} x_2^2 - 2\mu x_2 + \mu$

si $\mu \leq -1$ alors $\operatorname{Inf} = -\infty$

si $\mu > -1$ fction strict convexe $\rightarrow$ point critique $\quad 2x_1 = 0$

$2(\mu+1)x_2 - 2\mu = 0 \rightarrow x_2 = \frac{\mu}{\mu+1}$

alors $\operatorname{Inf} = \frac{\mu}{\mu+1}$

Donc $\theta(\mu)$ est toujours $< 1 \quad \forall \mu$. mais tend vers 1 quand $\mu \rightarrow +\infty$ d'où $\sup_\mu \theta(\mu) = 1$

II $\min x_1^2 + x_2^2$ s.c. $x_2 - 1 = 0$

$\theta(\mu) = \operatorname{Inf} \; x_1^2 + x_2^2 + \mu(x_2 - 1)$

strict convexe $\rightarrow$ point critique $\rightarrow \quad 2x_1 = 0$

$2x_2 + \mu = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{\mu}{2}$

$\theta(\mu) = -\frac{\mu^2}{4} - \mu$

$\theta(\mu)$ est concave $\rightarrow$ point critique $\rightarrow \; -\frac{\mu}{2} - 1 = 0 \rightarrow \mu = -2$

La valeur optimale est $\theta(-2) = -1 + 2 = 1$

on reprend (cf. conditions K.T.) le pb :

$\min\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \quad$ s.c. $\ 2kx_1 - x_2^2 \leq 0 \qquad$ (avec $k > 0$ paramètre)

on avait trouvé min. locaux stricts suivant : $x^{(1)} = (0,0) \quad 1/k \quad k > 1 \quad k = 1$?

$$\left[\begin{array}{lll} x^{(2)} = (1-k, \sqrt{2k(1-k)}) & 1 & (k \leq 1) \quad k < 1 \quad k = 1\ ? \\ x^{(3)} = (1-k, -\sqrt{}) & 1 & \end{array}\right.$$

Les conditions du 1er ordre ne pouvaient assurer l'optimalité globale (par manque de convexité de $g_1(x)$)
Les conditions suffisantes du 2e ordre ne garantissaient que la minimalité locale stricte.
Pour trouver l'optimum global, on peut, si on sait qu'il ~~y~~ en a un (par exemple min $\neq -\infty$), parcourir les points satisfaisants aux conditions nécessaires du 1er et 2e ordre et retenir celui qui donne la plus petite valeur à la fonction objectif.
Une autre méthode consiste à utiliser la dualité lagrangienne.

1) Construire et expliciter la fonction duale $\Theta(\lambda_1)$
2) Résoudre le pb dual
3) En déduire, à l'aide du th. de dualité, ~~que~~ l'optimalité de $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ selon les valeurs de k
4) Donner les points selles dans chacun des cas

---

1) $\mathcal{L}(x, \lambda_1) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + \lambda_1(2kx_1 - x_2^2) = x_1^2 + x_2^2(1 - \lambda_1) - 2x_1(1 - \lambda_1 k) + 1$

$H_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda_1) \end{bmatrix}$ donc $\mathcal{L}(x, \lambda_1)$ est convexe (en x) si $\lambda_1 \leq 1$ et strict^t convexe si $\lambda_1 < 1$

donc si $\lambda_1 < 1$ le min existe (la fonction est coercive il ne peut y avoir de min $= -\infty$)

si $\lambda_1 = 1 \quad \mathcal{L}(x, 1) = x_1^2 - 2x_1(1-k)$ le min ne saurait être $-\infty$ puisque le terme x_1^2 l'emporte. donc le min existe aussi dans ce cas.

calculons $\min\limits_x \mathcal{L}(x, \lambda_1)$

pour $\lambda_1 \leq 1$ point critique de $\mathcal{L}(x, \lambda_1) \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2(1 - \lambda_1 k) = 0 \rightarrow x_1 = 1 - \lambda_1 k \\ 2x_2(1 - \lambda_1) = 0 \rightarrow x_2 = 0 \text{ si } \lambda_1 < 1 \\ \qquad x_2 \text{ quelconque si } \lambda_1 = 1 \end{cases}$

pour $\lambda_1 > 1 \quad \min\limits_x \mathcal{L}(x, \lambda_1) = -\infty \quad$ prendre $x_1 = 0$ et $x_2 \rightarrow \pm\infty$

calculons alors $\Theta(\lambda_1)$

pour $\lambda_1 \leq 1 \quad \Theta(\lambda_1) = (1 - \lambda_1 k)^2 - 2(1 - \lambda_1 k)^2 + 1 = 1 - (1 - \lambda_1 k)^2 \qquad$ c'est bien concave

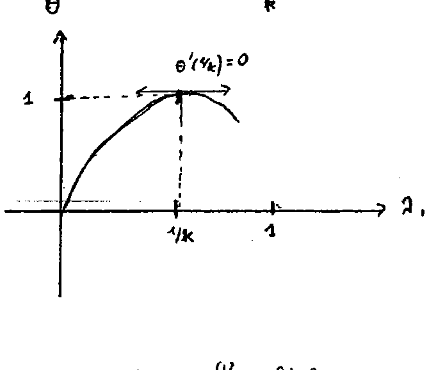
pour $\lambda_1 > 1 \quad \Theta(\lambda_1) = -\infty$

2) pour $\lambda_1 \leq 1$ la dérivée de Θ nous donne le max de Θ : $\Theta'(\lambda_1) = 2(1 - \lambda_1 k) = 0 \rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{k}$

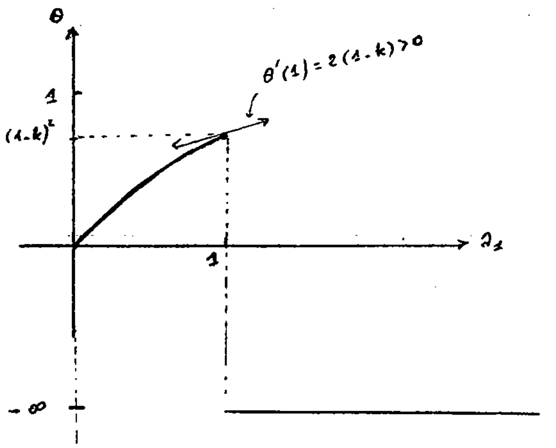
donc si $\frac{1}{k} \leq 1 \quad (k \geq 1) \quad \Theta$ atteint son max en $\lambda_1 = \frac{1}{k}$

si $\frac{1}{k} > 1 \quad (k < 1) \quad \Theta$ atteint son max en $\lambda_1 = 1$

$\boxed{k \geq 1}$



$\boxed{k < 1}$



$\Theta(1/k) = 1 = f(x^{(1)}) \rightarrow x^{(1)}$ min global

point qui réalise $\min\limits_x \mathcal{L}(x, \frac{1}{k})$: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{k} < 1 \\ \text{quelc.} & \text{si } \frac{1}{k} = 1 \end{cases} \end{cases}$

le point $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} \text{minimise } \mathcal{L}(x, \frac{1}{k}) \\ \text{vérifie la contrainte } g_1(x) \leq 0 \\ \text{et même } g_1(x) = 0 \\ \text{donc complimentarité satisfaite } (\lambda_1 = \frac{1}{k} > 0) \end{cases}$

donc $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 1/k$ point selle

3) $\Theta(1) = 1 - (1-k)^2 = -k^2 + 2k = f(x^{(2)}) \longrightarrow x^{(2)}$ min global
$= f(x^{(3)}) \longrightarrow x^{(3)}$ min global

4) point qui réalise $\min\limits_x \mathcal{L}(x, 1)$: $\begin{cases} x_1 = 1 - k \\ x_2 = \text{quelc.} \end{cases}$

les points $\begin{bmatrix} 1-k \\ \pm\sqrt{2k(1-k)} \end{bmatrix}$ $\begin{cases} \text{minimisent } \mathcal{L}(x, 1) \\ \text{vérifie la contrainte } g_1(x) \leq 0 \\ \text{et les relations de complémentarité } 1\ g_1(x) = 0 \end{cases}$

donc $\begin{bmatrix} " \\ " \end{bmatrix}, 1$ points selles

Contrôle 99

Dualité et saut de dualité (exercice 6-8 du polycopié vert)

I Soient $x_1, \dots, x_k$ k points de $\mathbb{R}^n$ et f fonction concave de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

On considère le pb (P) minimiser $f(x)$ s.c. $x \in S$ où S est l'ensemble des combinaisons convexes de $x_1, \dots, x_k$ i.e. l'ensemble des x t.q. $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$

Montrer qu'au moins un des $x_1, \dots, x_k$ est solution de (P).

II On considère le problème (P) : minimiser $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ s.c. $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$ et

$$(x_1, x_2) \in X = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq M,\ 0 \leq x_2 \leq M\}$$

où $M \geq 1$

On admettra que l'ensemble des solutions réalisables de (P) est l'ensemble des combinaisons convexes des 3 points $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

On considère le problème (D), dual de (P), maximiser $\theta(\lambda) = \inf_{(x_1,x_2) \in X} \{-x_1^2 - x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)\}$ s.c $\lambda \geq 0$

1) En invoquant le résultat de la question I, résoudre le problème (P)

2) a) En invoquant le résultat de la question I, déterminer $f(\lambda) = \inf_{0 \leq x \leq M} \{-x^2 + \lambda x\}$

b) En utilisant a) calculer

Déduire de a), l'expression de $\theta(\lambda)$. Tracer le graphe de θ et résoudre (D) graphiquement.

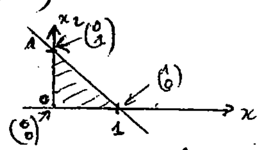
3) On considère ici le cas $M = 1$. Dans $X(1) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ l'ensemble des 4 points de X qui réalisent l'infimum dans le calcul de $\theta(1)$, trouver le ou les points (x_1, x_2) t.q. $(x_1, x_2, 1)$ soit un point selle.

Correction

I $\quad \forall x \in S \quad \underbrace{f(x) \geq}_{f \text{ concave}} \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k) \underbrace{\geq}_{\substack{\text{combinaison} \\ \text{convexe}}} f(x_i) \quad$ où $f(x_i) = \min_{j=1,\dots,k} \{ f(x_j) \}$

donc $\forall x \in S \quad f(x) \geq f(x_i)$ c'est-à-dire x_i est solution de (P).

II 1) $f(0,0) = 0$, $\quad f(1,0) = f(0,1) = -1 \quad$ on a donc 2 solutions $(1,0)$, $(0,1)$ et la valeur de (P) est -1 sachant que f est concave. (son hessien est défini négatif)

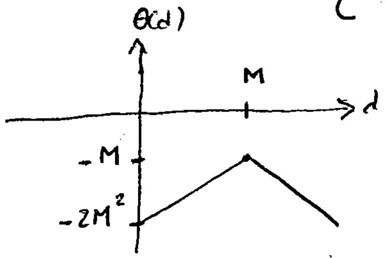


2) a) $-x^2 + \lambda x$ est concave donc le minimum sur $0 \leq x \leq M$ est atteint en 0 ou M.

$$f(\lambda) = \operatorname{Inf}_{0 \leq x \leq M} \{ -x^2 + \lambda x \} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq M \quad (x = 0) \\ -M^2 + \lambda M & \text{si } \lambda \leq M \quad (x = M) \end{cases}$$

b) $$\theta(\lambda) = \operatorname{Inf}_{(x_1,x_2) \in X} \{ -x_1^2 - x_2^2 + \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda \} = \operatorname{Inf}_{0 \leq x_1 \leq M} \{ -x_1^2 + \lambda x_1 \} + \operatorname{Inf}_{0 \leq x_2 \leq M} \{ -x_2^2 + \lambda x_2 \} - \lambda$$

$$= 2 f(\lambda) - \lambda = \begin{cases} -\lambda & \text{si } \lambda \geq M \\ -2M^2 + (2M-1)\lambda & \text{si } \lambda \leq M \end{cases}$$



On constate sur le graphe que $\max_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda)$ est atteint en $\lambda = M$ et $\theta(+M) = -M$

On a donc un saut de dualité si $M > 1$

3) Examinons le cas des 4 points de $X(1)$. Les 4 points réalisent l'Inf de la fonction de Lagrange en $\lambda = 1$ donc la caractéristique n° 1 des points selles est vérifiée.

Examinons les caractéristiques 2) et 3) des points selles.

2) $\Leftrightarrow$ solution réalisable de (P)
3) $\Leftrightarrow$ relation de complémentarité

$\binom{0}{1}, \binom{1}{0}$: $g(1,0) = g(0,1) = 0 \quad$ donc 2) et 3) satisfaites donc 2 points selles.

$\binom{0}{0}$: $g(0,0) < 0 \quad$ et $\lambda = 1 \neq 0 \quad$ donc 3) non satisfaite

$\binom{1}{1}$: $g(1,1) > 0 \quad$ donc 2) non ~~réalisable~~ satisfaite.

Exemple de saut de dualité.

minimiser e^{-y} s.c. $\sqrt{x^2+y^2} - x \le 0$ (P)

a) résolution du primal (P)

$(P) \Leftrightarrow e^{-y}$ s.c. $y = 0 \Rightarrow \boxed{1}$

b) donner la fonction duale. Que constate-t-on ?

$$\theta(\lambda) = \inf_{x,y} \{e^{-y} + \lambda(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2} - x}_{\geq 0})\} \geq 0 \qquad (\lambda \geq 0)$$

~~θ peut être atteint.~~

Prenons $x = y^3$ $\quad e^{-y} + \lambda\left(\sqrt{y^6+y^2} - y^3\right) = e^{-y} + \lambda y^3\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{y^4}\right)} - 1\right)$

puis $y \mapsto +\infty$

$$= e^{-y} + \lambda y^3\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{y^4} + \dots - \cancel{1}\right)$$

$$= e^{-y} + \lambda\left(\frac{1}{2y} + \dots\right) \rightarrow 0$$

l'inf atteint la valeur 0.

$\forall \lambda \geq 0 \quad \boxed{\theta(\lambda) = 0} \Rightarrow \max_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda) = 0$ saut de valeur entre (P) et (D)

minimiser e^{-y} s.c $y = 0$

c) donner la fonction duale. Que constate-t-on ?
et résoudre le pb dual

$\theta(\lambda) = \inf_{y} \{e^{-y} + \lambda y\}$

$\lambda < 0 \quad y \mapsto +\infty \Rightarrow \theta(\lambda) = -\infty$

$\lambda = 0 \quad y \to +\infty \Rightarrow \theta(0) = 0$

$\lambda > 0 \quad L(y,\lambda)$ convexe.

$L'(y,\lambda) = -e^{-y} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = e^{-y} \Rightarrow -y = \log \lambda$

$\theta(\lambda) = \lambda - \lambda \log \lambda$

$\theta'(\lambda) = \cancel{1} - \log \lambda - \cancel{1} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ maximum.

$\boxed{\theta(1) = 1}$ maximum. (pour λ quelconque)

le même problème formulé différemment ne présente plus de saut de dualité.

Soit le pb (P) : $\min\ 2x_1 + x_2$ s.c. $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$

on posera $g_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4$

1) Donner l'expression de la fonction duale $\Theta(\lambda_1)$

2) Résoudre le pb dual (D)

3) M.q. $\left(-\frac{4}{\sqrt5}, -\frac{2}{\sqrt5}\right), \frac{\sqrt5}{4}$ est un point selle. Vérifier qu'il n'y a pas de saut de dualité

4) Retrouver le point selle sans résoudre (D) mais en utilisant les caractéristiques (1), (2), (3) d'un point selle.

1) $\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda_1) = 2x_1 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 4)$

$\mathcal{L}$ est convexe (en x) pour $\lambda_1 \geq 0$, strict pour $\lambda_1 > 0$

pour $\lambda_1 > 0$ $\operatorname{Inf}_x \mathcal{L}$ est obtenu par un point critique : $\begin{cases} 2 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1/\lambda_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2\lambda_1} \end{cases}$

pour $\lambda_1 = 0$ $\operatorname{Inf}_x \mathcal{L} = -\infty$

donc $\Theta(\lambda_1) = -\frac{2}{\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1} + \lambda_1\left[\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{4\lambda_1^2} - 4\right] = -\frac{5}{4\lambda_1} - 4\lambda_1$ pour $\lambda_1 > 0$ (est bien concave)

$\Theta(\lambda_1) = -\infty$ pour $\lambda_1 = 0$

2) $\max_{\lambda_1 \geq 0} \Theta(\lambda_1)$ calculons $\Theta'(\lambda_1) = \frac{5}{4\lambda_1^2} - 4 = 0 \rightarrow \frac{5}{16} = \lambda_1^2 \rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt5}{4}$

$\Theta\left(\frac{\sqrt5}{4}\right) = -2\sqrt5$

3) $\operatorname{Inf} \mathcal{L}\left(x_1,x_2,\frac{\sqrt5}{4}\right)$ est atteint en $\begin{cases} x_1^* = -\frac{4}{\sqrt5} \\ x_2^* = -\frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$ caractéristique n° 1

ce point vérifie la contrainte $x_1^{*2} + x_2^{*2} = \frac{16+4}{5} \leq 4$ n° 2

et on a la relation de complémentarité $\frac{\sqrt5}{4} \times g_1(x_1^*, x_2^*) = 0$ n° 2

$\Rightarrow$ point selle.

on peut vérifier pas de saut de dualité : $f\left(-\frac{4}{\sqrt5}, -\frac{2}{\sqrt5}\right) = -\frac{8}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5} = -\frac{10}{\sqrt5} = -2\sqrt5 = \Theta\left(\frac{\sqrt5}{4}\right)$

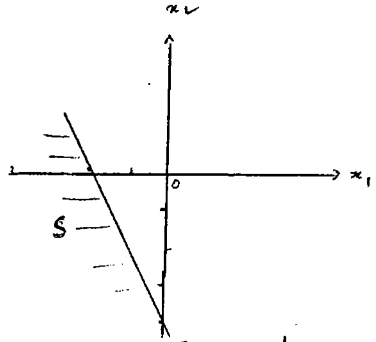
4) caractéristique n° 1 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1/\lambda_1 \\ x_2 = -1/2\lambda_1 \end{cases} \leftarrow \operatorname{Inf} \mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda_1)$

caractéristique n° 2 $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \rightarrow \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{4\lambda_1^2} \leq 4 \rightarrow \frac{5}{16} \leq \lambda_1^2 \rightarrow \lambda_1 \geq \frac{\sqrt5}{4}$

caractéristique n° 3 $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\sqrt5}{4}$ $\left(\text{si } \lambda_1 > \frac{\sqrt5}{4} \rightarrow \lambda_1 \times g_1(x_1,x_2) \neq 0\right)$

(P) = minimiser $f = x_1^2 + x_2^2$

s.c. $\quad 2x_1 + x_2 + 4 \leq 0$



1) Écrire la fonction duale.

$$\theta(\lambda) = \inf_{x_1, x_2} \{x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2x_1 + x_2 + 4)\} = \inf_{x_1, x_2} L(x_1, x_2, \lambda)$$

$L(x_1, x_2, \lambda)$ convexe $\Rightarrow$ minimum au point critique $\Rightarrow$ $2x_1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = -\lambda$

$2x_2 + \lambda = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{\lambda}{2}$.

$$\theta(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\left(-2\lambda - \frac{\lambda}{2} + 4\right) = \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{4} - 2\lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2} + 4\lambda = -\frac{5\lambda^2}{4} + 4\lambda$$

2) Résoudre le pb dual de (P)

maximiser $\theta(\lambda) = -\frac{5\lambda^2}{4} + 4\lambda$ s.c. $\lambda \geq 0$

θ concave $\Rightarrow$ maximum.
condition nécessaire = suffisante.

cond. de Kuhn Tucker. pour maximum
$$\begin{cases} \theta'(\lambda) + \mu = 0 \\ \mu \times \lambda = 0 \\ \lambda \geq 0, \ \mu \geq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta'(\lambda) = -\frac{5}{2}\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{5} \\ \mu = 0 \end{cases}$$

3) M.q. $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ est un point selle. Vérifier qu'il n'y a pas de saut de dualité.

a) $\lambda = \frac{8}{5} \geq 0$

b) $\inf_{x_1, x_2} L(x_1, x_2, \frac{8}{5}) = L\left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ $\quad$ $x_1 = -\lambda$, $x_2 = -\frac{\lambda}{2}$ réalise l'inf. de $L(x_1, x_2, \lambda)$ (caractéristique (1) des points selles est vérifiée).

c) $2 \times \left(-\frac{8}{5}\right) - \frac{4}{5} + 4 = \frac{-16 - 4 + 20}{5} = 0$ $\quad$ (caractéristique (2) et (3) des points selles sont vérifiées)

$2x_1 + x_2 + 4 = 0$.

On en déduit que $x_1 = -\frac{8}{5}$, $x_2 = -\frac{4}{5}$ est solution de (P).

vérifions que $\theta\left(\frac{8}{5}\right) = f\left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ $\quad$ $-\cancel{5} \times \frac{\overset{16}{\cancel{64}}}{\cancel{25} \times \cancel{4}_{5}} + \frac{32}{5} = \frac{-16}{5} + \frac{32}{5} = \frac{16}{5}$, $\quad \frac{64}{25} + \frac{16}{25} = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$

4) Retrouver le point selle sans résoudre le pb dual mais en utilisant les caractéristiques (1), (2), (3) des points selles.

$\inf_x L$ est atteint en $\begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = -\lambda/2 \end{cases}$ (point (1) des points selles) $\quad$ Le point $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ doit vérifier la contrainte (point (2) des points selle)

$\Rightarrow 2x_1 + x_2 + 4 = -2\lambda - \frac{\lambda}{2} + 4 = \boxed{-\frac{5\lambda}{2} + 4} \leq 0 \rightarrow \lambda \geq \frac{8}{5}$

si $\lambda > \frac{8}{5}$ la relation de complémentarité ne peut être satisfaite (point (3) point selle)

remarquer que (2) et (3) reviennent aux condition de Kuhn-Tucker pour le pb dual.

Exemple

minimiser $-xy$ s.c $\frac{1}{2}(x^2+y^2) \le 1$

C.N. du 1er ordre : $\begin{bmatrix}-y\\-x\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0$ $\qquad \lambda \ge 0$, $\lambda > 0 \Rightarrow x^2+y^2=2$.

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

1) $\lambda = 0 \quad x = y = 0$

2) $\lambda > 0 \Rightarrow x^2+y^2=2 \Rightarrow \lambda^2(x^2+y^2)=2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow x = y \Rightarrow x = \pm 1$

2 solutions $(1,1)$, $(-1,-1)$

C.N du 2è ordre :

1) contrainte non saturée $\lambda = 0 \Rightarrow$ fonction de Lagrange $= -xy$

$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ indéfini sur $\mathbb{R}^2$. $(0,0)$ pas un minimum.

2) $(1,1)$ qualifié : (gradient de la contrainte $\neq 0$) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

espace tangent $\{y : y_1+y_2=0\}$

$He = \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$ $\qquad (y_1\ y_2)\, He \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = y_1^2+y_2^2-2y_1y_2 = (y_1-y_2)^2 = (2y_1)^2$ sur l'espace tangent

nulle ssi $y_1 = 0$ donc $y_2 = 0$

He est déf. >0 sur espace tangent à la surface de la contrainte saturée.

$(1,1)$ minimum local strict.

$(-1,-1)$ identique.

Conclusion : le minimum pour le pb existe car ensemble des solutions est un compact.

La solution est nécessairement parmi les minima locaux :

$(1,1) \xrightarrow{f} -1$

~~$(-1,-1) \to -1$~~

les 2 points sont minimum globaux $\Rightarrow$ 2 solutions pour le problème.

définie positivité du Hessien : technique de la base de l'espace tangent.

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est une base de l'espace tangent $\qquad {}^t e\, He\, e$ doit être défini positive.

$$(1\ -1)\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = (1\ -1)\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} = 4$$

exemple : minimiser $-xy$ s.c $\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq 1$

relation point selle et solution des conditions de K.T

on a vu chapitre précédent que $x^* = (1,1)$ et $\lambda^* = 1$ vérifie les conditions de K.T.

pour $\lambda^* = 1$ $L((x,y),\lambda^*)$ est convexe car $HL = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ semi déf. positif.

donc $x^* = (1,1)$ qui vérifie $\nabla L((1,1),1) = 0$ minimise L (min global) et la caractéristique (1) des points selles vérifiée. Donc pour ce pb, il existe ~~deux~~ points selle. (remarquer que f pas convexe)

de même pour $(-1,-1)$.

recherche de la fonction duale.

$L(x,y,\lambda) = -xy + \lambda\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2) - 1\right)$ $\theta(\lambda) = \inf_{x,y} L(x,y,\lambda)$

$L(x,y,\lambda) = -xy + \frac{\lambda}{2}(x^2+y^2) - \lambda$

pour $0 \leq \lambda < 1$ pas de minimum prendre $x = y \Rightarrow -x^2 + \lambda x^2 = x^2(\underbrace{\lambda - 1}_{<0}) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

$\theta(\lambda) = -\infty$

pour $\lambda \geq 1$ posons $\lambda = 1+\varepsilon$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\left((1+\varepsilon)x^2 + y^2 - 2xy\right) = \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + \varepsilon(x^2+y^2)\right) \geq 0$

$\varepsilon = 0$ min atteint pour $x = y$ (plusieurs solutions) si $\lambda < 1$?

$\varepsilon > 0$ min atteint pour $x = y = 0$ $H_L = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$ si $\lambda \geq 1 \Rightarrow \lambda^2 - 1 \geq 0$ et H_L semi-déf positif

donc $\theta(\lambda) = -\lambda$

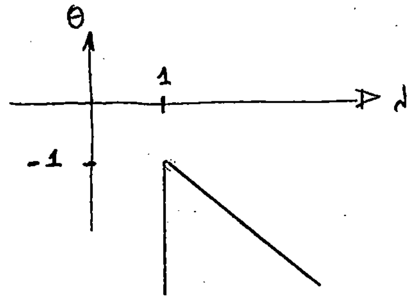
$\Rightarrow L$ convexe $\rightarrow$ point critique = min. global.

$\nabla_L = \begin{cases} \lambda x - y = 0 \\ \lambda y - x = 0 \end{cases}$ $\lambda = 1 \rightarrow x = y$

$\lambda > 1 \rightarrow \begin{cases} \lambda x = y \\ \lambda^2 x - x = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

résolution du pb dual.



θ est bien concave

le max de θ est atteint en $\lambda = 1$ $\theta(1) = -1$ donc valeur primal = valeur dual.

par ailleurs cela confirme que $(1,1)$ et $(-1,-1)$ min. locaux de (P) (primal) étaient bien des minimums globaux.

en $\lambda = 1$ il y a plusieurs min. de $L(x,y,1)$ parmi eux il y a $(1,1)$ et $(-1,-1)$

on a donc 2 points selles retrouvés.

$(1,1,\underset{\uparrow\ \lambda}{1})$ et $(-1,-1,\underset{\uparrow\ \lambda}{1})$ sont des points selles.

[illegible] par la méthode des plans sécants

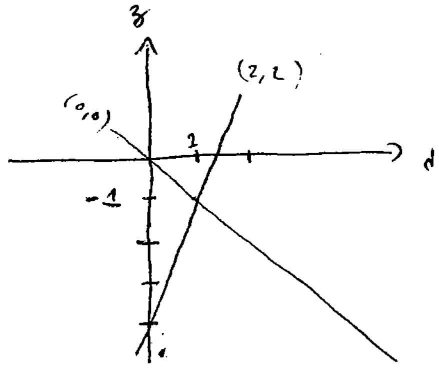
on prend comme $X_0 = (0,0), (2,2)$

pb maître ; $z \leq 0 - \lambda \quad \rightarrow (0,0)$

$z \leq -4 + 3\lambda \quad \rightarrow (2,2)$

maximisez $z \quad \rightarrow z = -1$ (résolution graphique)

$\lambda = +1$



sous.pb $\quad z^* = \min -xy + \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 1$

$= \min \frac{1}{2}(x-y)^2 - 1 \quad = -1$

on a $\quad z = z^* \quad$ on STOPPE.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Min } x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.c } 2x_1 + x_2 \leq -4 \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right. \quad (P)$$

résolution par le dual.

$$L(x_1,x_2,\Pi) = x_1^2 + x_2^2 + \Pi\left(2x_1 + x_2 + 4\right)$$

on cherche $\inf_x L(x_1,x_2,\Pi)$: L est strict. convexe en x donc un min local = un min global. Il suffit de chercher pt critique.

$$\left|\begin{array}{ll} 2x_1 + 2\Pi = 0 & \rightarrow x_1 = -\Pi \\ 2x_2 + \Pi = 0 & x_2 = -\frac{\Pi}{2} \end{array}\right.$$

on cherche $\sup_{\Pi \geq 0} \inf_x L(x_1,x_2,\Pi)$:

$$\Pi^2 + \frac{\Pi^2}{4} + \Pi\left(-2\Pi - \frac{\Pi}{2} + 4\right) =$$

$$\Pi^2 + \frac{\Pi^2}{4} - 2\Pi^2 - \frac{\Pi^2}{2} + 4\Pi =$$

$$-\Pi^2 - \frac{\Pi^2}{4} + 4\Pi = \quad \rightarrow \quad -\frac{5\Pi^2}{4} + 4\Pi =$$

$$h(\Pi) = \Pi\left(-\frac{5}{4}\Pi + 4\right)$$

$$h' = -\frac{5}{2}\Pi + 4$$

$$h'' = -\frac{5}{2} < 0 \quad \text{d'} < 0.$$

$$\Rightarrow h' = 0 \Rightarrow \Pi^* = \frac{4 \times 2}{5} = \frac{8}{5}$$

on vérifie que MP = MPD :

$$h(\Pi^*) = \frac{8}{5}\left(-\frac{5}{4} \times \frac{8}{5} + 4\right) = \frac{8}{5}\left(-2 + 4\right) = \frac{16}{5}$$

$$f(x^*) = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{8^2 + 4^2}{5^2} = \frac{64 + 16}{} = \frac{80}{5 \times 5} = \frac{10 \times 8}{5 \times 5} = \frac{2 \times 8}{5} = \frac{16}{5}$$

rem : La fonction est coercive ⇒ d'après th., dans ce cas MP = MD.

Attention :

on n'a pas tjs MP = MP, même dans le cas de progr. convexe.

ex :

$$P \left\{\begin{array}{l} \min e^{-y} \\ \text{s.c } \sqrt{x^2+y^2} - x \leq 0 \\ x, y \geq 0. \end{array}\right.$$

MP = 1 MD = 0

~~Si (P) est superconsistant et si (P) a une solution x^*, alors les multiplicateurs de K.K.T sont solutions du dual et MP = MPD~~

Dual d'un programme convexe.

$$L(x^*, \Pi) \leq L(x^*, \Pi^*) \leq L(x, \Pi^*) \qquad \forall \Pi \geq 0, \ \forall x \in C$$

1/ $$L(x^*, \Pi^*) \geq L(x^*, \Pi) \geq \inf_{x \in C} L(x, \Pi) \qquad \forall \Pi \geq 0.$$

$$\forall \Pi \geq 0 \Rightarrow L(x^*, \Pi^*) \geq \sup_{\Pi \geq 0} \inf_{x \in C} L(x, \Pi)$$

2/ $$L(x^*, \Pi^*) = \inf_{x \in C} L(x, \Pi^*) \leq \sup_{\Pi \geq 0} \inf_{x \in C} L(x, \Pi)$$

1 et 2 $\Rightarrow$ $$L(x^*, \Pi^*) = \sup_{\Pi \geq 0} \inf_x L(x, \Pi)$$

$$MP = f(x^*)$$

car $\Pi_i g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m$

on définit le prog dual

$$PD \left\{\begin{array}{l} \max h(\Pi) = \inf_x L(x, \Pi) \\ \Pi \geq 0 \end{array}\right.$$

on a montré que :

valeur PD = valeur du Primal P.

MPD = MP.