TD gradient projeté

$\min\ x_1^2 + 4x_2^2$ s.c. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \leq -1 & (1) \\ -x_1 + x_2 \leq 0 & (2) \\ -x_1 \leq 0\ (3),\ -x_2 \leq 0\ (4) \end{cases}$

itération 1

$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad L = \{y : -y_1 + y_2 = 0\}$ $\quad P_L = I - \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{{}^tA} \underbrace{\left[\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]^{-1}}_{(A\,{}^tA)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = I - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$\nabla f(P_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$P_L(-\nabla f(P_0)) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad$ vérif : $-\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$

$P_0 + \alpha d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 5\alpha \\ 1 - 5\alpha \end{bmatrix}$

contrainte 1 : $\cancel{3} - 15\alpha \geq \cancel{1} \Rightarrow 2 \geq 15\alpha \Rightarrow \alpha \leq 2/15$

contraintes 3 et 4 : $1 - 5\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 1/5$

$\Rightarrow \alpha \leq \frac{2}{15}$

$f(\alpha) = (1-5\alpha)^2 + 4(1-5\alpha)^2 \Rightarrow f'(\alpha) = \cancel{2}(1-5\alpha)\times(-\cancel{5}) + \cancel{8}(1-5\alpha)(-\cancel{5}) = 0$

$= 5(1-5\alpha)^2 \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$

itération 2

$P_1 = P_0 + \frac{2}{15}d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ $\qquad L = \left\{ y : \begin{array}{l} -y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + 2y_2 = 0 \end{array} \right\} = \{0\}$

exprimons $\nabla f(P_1)$ dans $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} + d_1\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ $\quad \begin{cases} d_2 = \frac{-10}{9} + \frac{2}{3} = \frac{-4}{9} < 0 \\ d_1 = \frac{1}{3}\left(+\frac{10}{3}\right) = \frac{+10}{9} \end{cases}$

$\nabla f(P_1) + d_1 \nabla g_1 + d_2 \nabla g_2 = 0$

on relache $g_2 \Rightarrow L : \{y : y_1 + 2y_2 = 0\}$ $\qquad P_L = I - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = I - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & +1/5 \end{bmatrix}$

$\nabla f(P_1) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$

$P_L(-\nabla f(P_1)) = -\begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 8/15 \\ -4/15 \end{bmatrix}$ $\quad$ vérif : $-\begin{bmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8/15 \\ 4/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18/15 \\ -36/15 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -18/15 \\ -36/15 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 8/15 \\ 4/15 \end{bmatrix}$

$P_1 + \alpha d = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} - \alpha\begin{bmatrix} -8/15 \\ 4/15 \end{bmatrix} =$

contrainte 2 : $-\cancel{\frac{1}{3}} - \alpha\frac{8}{15} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{4\alpha}{15} \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$

contrainte 3 : $1/3 + \alpha\frac{8}{15} \geq 0 \Rightarrow$

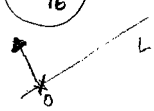
" 4 : $1/3 - \frac{4}{15}\alpha \geq 0 \Rightarrow 1 - \frac{4}{5}\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \alpha \leq \frac{5}{4}$

$f(\alpha) = \left(1/3 + \alpha\frac{8}{15}\right)^2 + 4\left(1/3 - \frac{4}{15}\alpha\right)^2 \Rightarrow f'(\alpha) = \cancel{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha 8}{15}\right)\cancel{\frac{8}{15}} + \cancel{8}\left(1/3 - \alpha\frac{4}{15}\right)\left(-\cancel{\frac{4}{15}}\right)^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} + \alpha\frac{16}{15} = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \times \frac{5}{16}$

itération 3

$P_2 = P_1 - \frac{5}{16}\begin{bmatrix} -8/15 \\ 4/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$ $\qquad L = \{y : y_1 + 2y_2 = 0\}$



$\nabla f(P_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad P_L(-\nabla f(P_2)) = \begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ donc $\nabla f(P_2) \in L^\perp$

exprimons $-\nabla f(P_2)$ dans $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$: $\nabla f(P_2) + d_1 \nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + d_1\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow d_1 = 1 \geq 0$

les conditions de Kuhn-Tucker sont vérifiées.

Gradient projeté

Soit le pb minimiser $\frac{1}{2}\| g - p\|^2$ s.c. $Ap = 0$ A matrice $m \times n$ $m<n$ de rang m, g fixé $n \times 1$

Ecrire et résoudre les conditions de K.T. de ce pb. Retrouver la formule de l'opérateur de projection sur l'espace $L = \{p : Ap = 0\}$.

A rang plein $\Rightarrow$ tout point p vérifie la qualification de l'indépendance linéaire.

$$\text{K.T.} \quad \begin{cases} -(g-p) + {}^tA\mu = 0 & (1) \\ Ap = 0 & (2) \end{cases}$$

1 pt

$$A(1) \to -Ag + \underbrace{\cancel{Ap}}_{0} + A\,{}^tA\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = (A\,{}^tA)^{-1}Ag}$$

1 pt

on reporte dans (1) $\quad p = g - {}^tA(A\,{}^tA)^{-1}Ag = \underbrace{\left(I - {}^tA(A\,{}^tA)^{-1}A\right)}_{P_L}g$ 1 pt

Les conditions de convexité étant satisfaites (suffisance) la solution est minimum global i.e. solution du pb de projection

---

Soit le pb minimiser ${}^tg\,d$ s.c. $Ad = 0$, $\|d\|^2 = 1$ A matrice $m \times n$ $m<n$ de rang m, g vecteur $n \times 1$

Montrer q une solution optimale de ce pb est dans la direction opposée à la projection de g sur $L = \{p : Ap = 0\}$

$$\text{K.T.} \quad \begin{cases} g + {}^tA\mu + 2d = 0 \\ Ad = 0 \\ \|d\|^2 = 1 \end{cases}$$

λ ?

$$(1) \Rightarrow Ag + A\,{}^tA\mu + 2\cancel{Ad}^{\,0} = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = -(A\,{}^tA)^{-1}Ag}$$

$$(1) \Rightarrow 2d = -g + {}^tA(A\,{}^tA)^{-1}Ag = -(I - {}^tA(A\,{}^tA)^{-1}A)g = -P_L g$$

$\min\ x_1^2 + 4x_2^2$ s.c $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{TD gradient réduit}}$

itération 1

$P_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $B = \{1, 3\}$ $N = \{2, 4\}$ $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $A_B^{-1} = -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A_B^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $A_B^{-1} A_4 = -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} = [2x_1\ \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 8x_2$ $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} = 8x_2$ $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_4} = [2x_1\ \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 = 2x_1$ $A_B^{-1} A_2 = -1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$= 2x_1 + 8x_2$

$r = \begin{pmatrix} 10 & 2 \end{pmatrix}$ with indices $\uparrow 2$, $\uparrow 4$ $\quad d_N = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad d_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{-A_B^{-1}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -30 \end{bmatrix}$

$-A_B^{-1} A_N d_N$

$1 \to 1 - \alpha 10 \geq 0 \to \alpha \leq \frac{1}{10}$

$2 \to 1 - \alpha 10 \geq 0 \to \alpha \leq \frac{1}{10}$

$3 \to 2 - \alpha 30 \geq 0 \to \alpha \leq \frac{1}{15}$

$\frac{dF}{d\theta} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \ \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_3}\ \ \frac{\partial f}{\partial x_4}}_{0} \right] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} = [2x_1\ \ 8x_2] \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix} = -10\,[2x_1 + 8x_2] = 0$

$2(1 - 10\alpha) + 4(1 - 10\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{10}$ on prend $\alpha = \frac{1}{15}$

$\alpha(-50) + 5$

$P_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{10}{15} \\ 1 - \frac{10}{15} \\ 2 - \frac{1}{15} \times 30 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{2}{3} \\ 2 - 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

chg^t Base : 3 sort on remplace par 2 (la plus gde)

$A_B^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1/3 & +\frac{2}{3} \\ -1/3 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2^{è} itération

$B = \{1, 2\}$ $N = \{3, 4\}$

$A_B^{-1} \underset{A_3}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} +1/3 & -\frac{2}{3} \\ 1/3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $A_B^{-1} A_4 = \begin{bmatrix} +1/3 & -\frac{2}{3} \\ 1/3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_3} = (2x_1\ \ 8x_2) \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2x_1 + 8x_2)$ $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_4} = (2x_1\ \ 8x_2) \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \frac{4}{3}x_1 - \frac{8}{3}x_2$

$r = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$ with indices $\uparrow 3$, $\uparrow 4$ $\quad d_N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}^t$ $\quad d_B = -A_B^{-1} A_N d_N = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/27 \\ -\frac{4}{27} \end{bmatrix}$

$1 \to \frac{1}{3} + \alpha \frac{8}{27} \geq 0$

$2 \to \frac{1}{3} - \alpha \frac{4}{27} \geq 0 \to \alpha \leq \frac{9}{4}$

$4 \to 0 + \alpha \frac{4}{9} \geq 0$

$\frac{dF}{d\theta} = [2x_1\ \ 8x_2] \begin{bmatrix} 8/27 \\ -\frac{4}{27} \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \left[16 \left(\frac{1}{3} + \alpha \frac{8}{27} \right) - 32 \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{27}\alpha \right] \right] = 0$

$= -\frac{1}{3} + \frac{16}{27}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{9}{16}$

$P_2 = \begin{bmatrix} 1/3 + 1/6 \\ 1/3 - \frac{1}{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

<u>3^e itération</u>

$$x = \left[\tfrac{1}{3}(1+2) \quad \tfrac{1}{3}(2-2)\right] = \left[\underset{3}{1} \quad \underset{4}{0}\right] \Rightarrow d_N = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \text{FIN.}$$

<u>vérification K.T.</u>

$$\mu = -\frac{\partial f}{\partial x_B} A_B^{-1} = -\left(\underbrace{2\times\tfrac{1}{2}}_{1} \quad \underbrace{8\times\tfrac{1}{4}}_{2}\right)\begin{bmatrix}1/3 & -\frac{2}{3}\\ 1/3 & 1/3\end{bmatrix} = \left[-1 \quad 0\right]$$

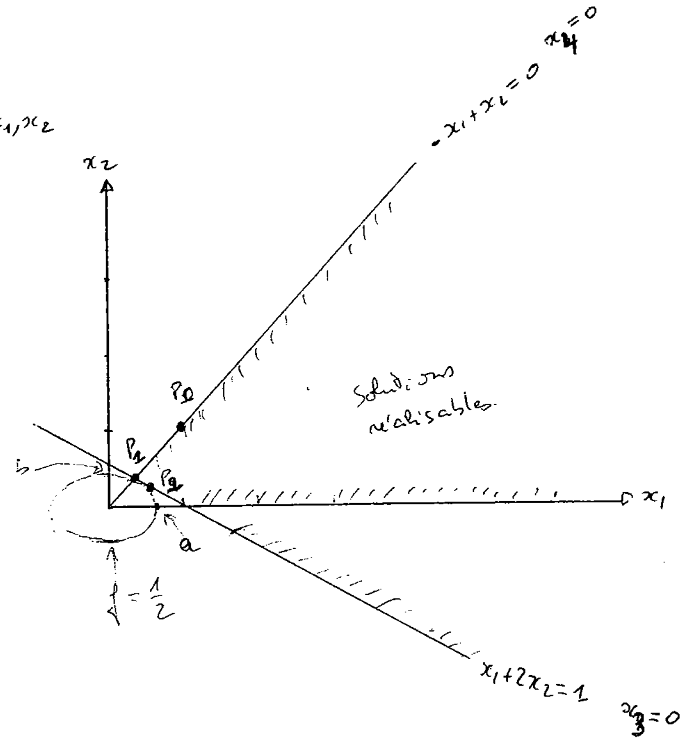
$d_1 = 0 \quad d_2 = 0 \qquad d_3 = 1 \qquad d_4 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \mu A - d = \left[2\times\tfrac{1}{2} \quad 8\times\tfrac{1}{4} \quad 0 \quad 0\right] + \left[-1 \quad 0\right]\begin{bmatrix}1 & +2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} - \left[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\right]$$

$$= \left[1 \quad 2 \quad 0 \quad 0\right] + \left[-1 \quad -2 \quad +1 \quad 0\right] - \left[0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\right] = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]$$

complémentarité : $d_3 \times x_3 = 1 \times 0$ les autres $d_i = 0$ donc vérifié.

cheminement dans le plan $0, x_1, x_2$



$$f = \frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$x_1^2 + 4x_2^2 = \frac{1}{2}$$

$$2x_1^2 + 2\times 4\, x_2^2 = 1$$

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7 \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}35 \qquad \text{courbe niveau = ellipse}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Gradient projeté

Soit le pb (P) : $\underset{d\in\mathbb{R}^n}{\text{minimiser}}\ g^t d$ s.c. $Ad = 0$, $\|d\|^2 = 1$

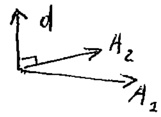
où A matrice $m\times n$ ($m<n$) de rang m, g vecteur $n\times 1$

Montrer que d, une solution optimale de (P), est dans la direction opposée à la projection de g sur $L = \{p : Ap = 0\}$ (lorsque celle-ci est non nulle).

une ligne de A correspond à un gradient d'une ligne de Ad

$2d$ ———— gradient de $\|d\|^2 - 1$

tout d t.q. $Ad = 0$ et $d \neq 0$ vérifie la qualif. de l'indépendance linéaire car les lignes de A sont lin^t ind^t et d est orthogonal à ces lignes.



donc K.T sont des conditions <u>nécessaires</u> d'optimalité

$$\text{K.T}\begin{cases} g + A^t\mu + 2\alpha d = 0 & (1)\\ Ad = 0 \\ \|d\|^2 = 1\end{cases}$$

$$(1) \xrightarrow{A} Ag + \overbrace{AA^t}^{\text{inversible car } A \text{ de rang } m}\mu + 2\alpha \overbrace{Ad}^{0} = 0 \longrightarrow \mu = -(AA^t)^{-1}Ag$$

$$(1) \xrightarrow{d^t} d^tg + \underbrace{d^tA^t}_{(Ad)^t = 0}\mu + 2\alpha \underbrace{d^td}_{1} = 0 \longrightarrow 2\alpha = -d^tg$$

$$(1) \longrightarrow g - A^t(AA^t)^{-1}Ag - (d^tg)d = 0 \longrightarrow (d^tg)d = \left(I - A^t(AA^t)^{-1}A\right)g$$

$d^tg \leq 0$ <u>en effet si</u> $d^tg > 0$ en prenant $d' = -d$ alors $Ad' = 0$ et $\|d'\|^2 = 1$ et $-d'^tg < 0$ ce qui est donc plus petit que $\underset{g^td}{\overset{}{d^tg}}$ et d n'est pas solution de (P).

on peut retrouver ici par les C.N 2^e ordre pour $m \leq n-2$
$H_{\mathcal{L}} = 2\alpha I \geq 0$ sur $T(S^+(d), d) = \{y : Ay = 0,\ d\cdot y = 0\} = F^+(d)$ d vérifie qualif. ind. lin.
si $y \neq 0$; $y \cdot H_{\mathcal{L}} y = 2\alpha\|y\|^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0 \Rightarrow d^tg \leq 0$

si $d^tg = 0$ alors $g = -A^t\mu$ donc $g \in L^\perp$ et $P_L(g) = 0$ (projection de g sur L)

dans ce cas tout $d \in L$ et de norme 1 est solution car vérifie $g^td = 0$

si $d^tg < 0$ alors $d = \underbrace{\frac{1}{d^tg}}_{<0}\underbrace{\left(I - A^t(AA^t)^{-1}A\right)}_{P_L}g = \underbrace{\frac{1}{d^tg}}_{<0}P_L(g)$ (2) P_L opérateur de projection (orthogonale) sur L

noter que (P) admet bien une solution car on minimise une fonction continue (linéaire) sur un compact.

<u>Interprétation</u> : on pose g = gradient de f en x
soit $d \in L$ et de norme 1, alors g^td est la dérivée de f en x dans la direction d
on minimise la dérivée directionnelle en prenant une direction d opposée à la projection du gradient de f en x sur L.

Finalement (2) $\Rightarrow g^td = \frac{1}{d^tg}g^tP_Lg \Rightarrow (d^tg)^2 = g^tP_Lg \geq 0$ (P_L est semi déf. positive) $\Rightarrow d^tg = -\sqrt{g^tP_Lg}$ car $d^tg \leq 0$

et $d = -\frac{1}{\sqrt{g^tP_Lg}}P_Lg$ pour $d^tg < 0$, comme $P_L^2 = P_L$ et $P_L^t = P_L$ (symétrique) $\sqrt{g^tP_Lg} = \sqrt{g^tP_L^tP_Lg} = \|P_Lg\|$

Gradient projeté

Soit le pb minimiser $x^2 + xy + y^2$ s.c. $\begin{cases} x+y \leq 2 & (1) \\ x+y \geq 1 & (2) \end{cases}$

Appliquer la méthode du gradient projeté en partant de $p^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{bmatrix}$ $\quad \nabla f(p^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad P_L =$

(1) est saturée $\quad A = (1 \;\; 1)$ $\quad P_L = I - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left[(1 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} (1 \;\; 1)$

$$= I - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_L\left(-\nabla f\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dérivée de f dans la direction $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ du point $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$: $2\alpha + (2-\alpha) + [2(2-\alpha) + \alpha](-1) = \alpha - 2 + \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

$$p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

suite au dos.

Gradient projeté

Soit le pb minimiser $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ s.c. $\begin{cases} x+y \leq 2 & (1) \\ x+y \geq 1 & (2) \end{cases}$

Appliquer la méthode du gradient projeté en partant du point $P^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

itération 0. $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{bmatrix}$ $L = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} : x+y=0\right\}$.

$P^{(0)}$ sature (1) $P_L = I - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\left[(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}(1\ \ 1) = I - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\nabla f(P^{(0)}) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ $P_L\left(-\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 2pt.

$\lambda = -(A\,{}^tA)^{-1} A\, \nabla f(P^{(0)}) = -\frac{1}{2}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \boxed{-3}$ on a bien $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$

$\nabla f(P^{(0)}) - 3\nabla g_1 = 0$.

$\lambda < 0$ donc on la relache.

itération 1. $L = \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$

dérivée dans la direction $-\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $= \left[2(1-3\alpha) + (1-3\alpha)\right] \times (-3) \times 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$

déplacement maximum $(2) \Rightarrow (1-3\alpha)\times 2 \geq 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{6} \geq \alpha}$ 2pt

$P^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ sature contrainte (2).

itération 2. $L = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} : -x-y=0\right\}$ on a déjà calculé P_L 2pt.

$\nabla f(P^{(1)}) = \begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix}$ $P_L\left(-\begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix}\right) = 0$ $\lambda = +\frac{1}{2}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix} = \boxed{\frac{3}{2}}$ on a bien $\underbrace{\begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix}}_{\nabla f(P^{(1)})} + \frac{3}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}_{\nabla g_2} = 0$

$\lambda \geq 0 \Rightarrow$ STOP.