contrôle MOM Juin 2011

Pas de calculette. Documents autorisés.

Conditions de Kuhn-Tucker, dualité, pénalité.

Soit le problème suivant :

(P) $\min_{(x_1,x_2)\in R^2} f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2$ sous la contrainte $x_1 + x_2 \geq 1$

1) Conditions de Kuhn-Tucker.

4 a) Résoudre les conditions de Kuhn-Tucker.

2 b) Sont-elles des conditions suffisantes d'optimalité dans le cas de (P) et pourquoi ?

2 c) En déduire x^* la solution de (P) et calculer $f(x^*)$.

2) Dualité.

On note $\theta(\lambda) = \min_{(x_1,x_2)\in R^2} 3x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda(-x_1 - x_2 + 1)$ la fonction duale.

4 a) Donner l'expression de $\theta(\lambda)$ en fonction de λ uniquement. Vérifier que θ est concave.

2 b) Enoncer (D) le problème dual de (P) et le résoudre.

3 c) Soit λ^* la solution optimale de (D). Calculer $\theta(\lambda^*)$. Existe-t-il un saut de dualité entre (P) et (D) ?

voir corrigé contrôle juin 2009

3) Pénalité de Beltrami.

On pose $g(x) = 1 - x_1 - x_2$. La contrainte de (P) s'écrit donc $g(x) \leq 0$.

a) Résoudre (P) par la méthode de pénalité de Beltrami avec $\mu_k = k$.

4 b) Retrouver le multiplicateur de Lagrange des conditions de Kuhn-Tucker.

$$\min \quad 3x_1^2 + 2x_2^2 \qquad \text{s.c.} \quad x_1 + x_2 \geq 1$$

Pénalité de Beltrami

$P(x) = g^+(x) = \max\{0, \underbrace{1 - x_1 - x_2}_{g(x)}\}$

$\mu_k = k$

$$\min \quad 3x_1^2 + 2x_2^2 + k\, g^{+2}(x)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}}_{\nabla f} + 2k g^+ \nabla g = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} + 2k g^+ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

cas $g^+ = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 6x_1 = 0 \\ 4x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow g^+ = 1$ impossible

cas $g^+ > 0 \Rightarrow 6x_1 = 4x_2$ en combinant (1) et (2) $\Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} x_1$

$\rightarrow$ dans (1) $6x_1 + 2k\left(1 - x_1 - \frac{3}{2} x_1\right)(-1) = 0$

$6x_1 - 2k\left(1 - \frac{5}{2} x_1\right) = 0 \rightarrow 6x_1 - 2k + 5k x_1 = 0 \rightarrow x_1(6+5k) = 2k$

$\rightarrow x_1 = \frac{2k}{6+5k} \rightarrow x_2 = \frac{3k}{6+5k}$

x_k admet une limite donc solution de (P) $\rightarrow \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$

$$\lambda_k = 2k\underbrace{\left(1 - \frac{2k+3k}{6+5k}\right)}_{g(x_k)} = 2k\underbrace{\left(1 - \frac{5k}{6+5k}\right)}_{>0} = 2k\left(\frac{6+\cancel{5k}-\cancel{5k}}{6+5k}\right) = \frac{12k}{6+5k} \xrightarrow{k} \frac{12}{5}$$

contrôle MOM Juin 09

Durée : 1h30. Pas de calculette. Documents autorisés.

exercice 1 : conditions de Kuhn-Tucker, dualité.

Soit le problème suivant :

(P) $\min_{(x_1,x_2)\in R^2} f(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_2^2$ sous la contrainte $x_1+x_2\geq 1$

1) Conditions de Kuhn-Tucker.

a) Résoudre les conditions de Kuhn-Tucker.

b) Sont-elles des conditions suffisantes d'optimalité dans le cas de (P) et pourquoi ?

c) En déduire x^* la solution de (P) et calculer $f(x^*)$.

2) Dualité.

On note $\theta(\lambda)=\min_{(x_1,x_2)\in R^2} 3x_1^2+2x_2^2+\lambda(-x_1-x_2+1)$ la fonction duale.

a) Donner l'expression de $\theta(\lambda)$ en fonction de λ uniquement. Vérifier que θ est concave.

b) Enoncer (D) le problème dual de (P) et le résoudre.

c) Soit λ^* la solution optimale de (D). Calculer $\theta(\lambda^*)$. Existe-t-il un saut de dualité entre (P) et (D) ?

exercice 2 :méthode de pénalité.

Soit le problème suivant :

(P) $\min_{(x_1,x_2)\in R^2} x_2$ sous la contrainte $x_1^2+x_2^2\leq 1$

On considère le problème sans contrainte :

(P_k) $\min_{(x_1,x_2)\in R^2} x_2+\mu_k\left(g^+(x_1,x_2)\right)^2$

avec $g^+(x_1,x_2)=\max\{0,g(x_1,x_2)\}$ et $g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1$

et la suite $\mu_k>0,\quad \mu_k\xrightarrow{k}\infty,\quad k\geq 2$.

On note $x^{(k)}$ la solution de (P_k). On admettra que $x_2+\mu_k\left(g^+(x_1,x_2)\right)^2$ est convexe. On rappelle que le gradient de $\left(g^+\right)^2$ est donné par $\nabla\left(g^+\right)^2=2g^+\nabla g$.

1) Donner le système de 2 équations permettant de trouver $x^{(k)}$. g^+ peut-il être nul ? En déduire que la première coordonnée de $x^{(k)}$ est nulle.

2) On considère maintenant $\mu_k=\frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{k^{1/3}}-\frac{1}{k}}$ ($k\geq 2$).

a) Ecrire l'équation permettant de trouver la deuxième coordonnée de $x^{(k)}$.

Cette équation admet 3 racines. Donner les. Indication : on remarquera que l'équation admet $\frac{1}{k^{1/3}}$ comme racine évidente.

b) Laquelle des 3 racines précédentes est valide (tenant compte que $g^+>0$) ?

c) En déduire $x^{(k)}$ puis la solution de (P).

d) On considère l'approximation du multiplicateur de Lagrange $\lambda^{(k)}=2\mu_k g^+\left(x^{(k)}\right)$. Calculer λ_k et sa limite (quand $k\to\infty$). En déduire le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g(x_1,x_2)\leq 0$.

Contrôle juin 2009

Soit le pb (P) : $\min f = 3x_1^2 + 2x_2^2$ s.c $x_1 + x_2 \geq 1 \iff 1 - x_1 - x_2 \leq 0$

1) Conditions de Kuhn-Tucker

a) Résoudre les conditions de Kühn-Tücker

4 K.T. $\begin{cases} \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda(1 - x_1 - x_2) = 0 \ ; \ \lambda \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$

cas $\lambda = 0$ $\begin{cases} 6x_1 = 0 \\ 4x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = x_2 = 0$ mais le point ne satisfait pas la contrainte $x_1 + x_2 \geq 1$

cas $\lambda > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$

$\left.\begin{matrix} 6x_1 - \lambda = 0 \\ 4x_2 - \lambda = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{6}$, $x_2 = \frac{\lambda}{4}$ $\Rightarrow \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{4} = \frac{2\lambda + 3\lambda}{12} = \frac{5\lambda}{12} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{5}$

et finalement $x_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = \frac{3}{5}$

1 b) Sont-elles des conditions suffisantes d'optimalité pour (P) ?

oui par convexité : f est convexe et la contrainte $1 - x_1 - x_2$ est convexe.
d'inégalité

1 c) En déduire x^* la solution de (P) et $f(x^*)$

d'après b) et a) $x^* = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$ et $f(x^*) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{12 + 18}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$

2) Dualité

la fonction duale est $\theta(\lambda) = \min\limits_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} 3x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$

a) Expliciter $\theta(\lambda)$

la fonction à minimiser est convexe. Donc pour calculer le min, il suffit de chercher un point critique.

$\begin{cases} 6x_1 - \lambda = 0 \\ 4x_2 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{\lambda}{6} \\ x_2 = \frac{\lambda}{4} \end{matrix} \Rightarrow \theta(\lambda) = 3\left(\frac{\lambda}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + \lambda - \lambda \times \frac{\lambda}{6} - \lambda \times \frac{\lambda}{4}$

3

$= \lambda^2\left(\frac{3}{6\times6} + \frac{2}{4\times4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) + \lambda = \lambda^2\left(\frac{1}{6\times2} + \frac{1}{4\times2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) + \lambda$

$= \lambda^2\left(\frac{2 + 3 - 4 - 6}{6\times2\times2}\right) + \lambda = \lambda^2\left(-\frac{5}{24}\right) + \lambda$

θ est bien concave. $\theta(\lambda) = -\frac{5}{24}\lambda^2 + \lambda$

$H_\theta = -\frac{5}{24} \times 2 < 0$

b) Enoncer et résoudre le pb dual (D).

2 (D) : $\max\limits_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda)$. Pour le résoudre, cherchons un point critique. Si il satisfait $\lambda \geq 0$ c'est bon.

$\theta'(\lambda) = -\frac{5}{12}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{5} \geq 0$ donc c'est bon.

c) On note λ^* la sol. optimale de (D). Calculer $\theta(\lambda^*)$. Y-a-t-il saut de dualité ?

1 $\theta(\lambda^*) = \theta\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{5}{24} \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \frac{12}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{6}{5}$

$\theta(\lambda^*) = f(x^*) = \frac{6}{5}$ donc pas de saut de dualité

1) (P_k) : $\min \; x_2 + \mu_k (g^+)^2(x)$ avec $g^+(x) = \max\{0, \underbrace{x_1^2 + x_2^2 - 1}_{g(x)}\}$

La fonction étant convexe, il suffit de chercher un point critique :

2 $$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 2\mu_k g^+ \begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad (A)$$

si $g^+(x) = 0$ cela donne : $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ce qui est impossible

2 donc $g^+(x) = g(x) > 0$

la première équation devient : $0 + 2\underbrace{\mu_k g^+}_{>0} 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

2) $\mu_k = \dfrac{1}{4} \dfrac{1}{\frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{k}}$ $(k \geq 2)$

a) la deuxième équation de (A) devient : $1 + 4 \times \underbrace{\dfrac{1}{4} \dfrac{1}{k^{-1/3} - k^{-1}}}_{\mu_k} (\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{x_1^2} + x_2^2 - 1) x_2 = 0 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{k^{-1/3} - k^{-1}} (x_2^2 - 1) x_2 = 0$

soit encore : $x_2^3 - x_2 + \dfrac{1}{k^{1/3}} - \dfrac{1}{k} = 0$

on voit bien que $x_2 = \dfrac{1}{k^{1/3}} \Rightarrow x_2^3 = \dfrac{1}{k}$ et que $\dfrac{1}{k^{1/3}}$ est une racine de cette équation.

l'équation se met donc sous la forme (on remplace x_2 par x pour alléger)

2 $$\left(x - \frac{1}{k^{1/3}}\right)\left(x^2 + \alpha x + \beta\right) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - \frac{1}{k^{1/3}} x^2 - \frac{\alpha}{k^{1/3}} x - \frac{\beta}{k^{1/3}} = x^3 + x^2 \underbrace{\left(\alpha - \frac{1}{k^{1/3}}\right)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + x \underbrace{\left(\beta - \frac{\alpha}{k^{1/3}}\right)}_{\overset{\shortparallel}{-1}} \underbrace{- \frac{\beta}{k^{1/3}}}_{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{k}}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{k^{1/3}} \quad \Rightarrow \beta = -1 + \frac{1}{k^{2/3}} \quad \Rightarrow \frac{1 - 1/k^{2/3}}{k^{1/3}} = \frac{1}{k^{1/3}} - \frac{1}{k}$$

donc $x^2 + \dfrac{x}{k^{1/3}} + \dfrac{1}{k^{2/3}} - 1 = 0$ à résoudre. (second degré)

2 $\Delta = b^2 - 4ac = \dfrac{1}{k^{2/3}} - 4\left(\dfrac{1}{k^{2/3}} - 1\right) = -\dfrac{3}{k^{2/3}} + 4 \geq 0$ (et même ≥ 1) pour $k \geq 1$

donc 2 racines réelles : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\frac{1}{k^{1/3}} \pm \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}}}{2}$

b) nous devons avoir $g^+(x) > 0$ c'est-à-dire $g(x) > 0$

1 pour $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{1}{k^{1/3}}$ $\quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 > 0$ devient $\dfrac{1}{k^{2/3}} > 1$ ce qui est faux

1 $x_1 = 0$; $x_2 = \left[-\dfrac{1}{k^{1/3}} + \sqrt{4 - \dfrac{3}{k^{2/3}}}\right] \times \dfrac{1}{2}$ $\quad x_1^2 + x_2^2$ devient $\dfrac{1}{4}\left[-\dfrac{1}{k^{1/3}} + \sqrt{4 - \dfrac{3}{k^{2/3}}}\right]^2 \leq \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{4}\right)^2 = 1$ donc $x_1^2 + x_2^2 > 1$ est faux

2 $x_1 = 0$; $x_2 = \left[-\dfrac{1}{k^{1/3}} - \sqrt{4 - \dfrac{3}{k^{2/3}}}\right] \times \dfrac{1}{2}$ $\quad$ " " " $\quad \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{k^{1/3}} + \sqrt{4 - \dfrac{3}{k^{2/3}}}\right]^2 = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{k^{2/3}} + 4 - \dfrac{3}{k^{2/3}} + \dfrac{2}{k^{1/3}}\sqrt{4 - \dfrac{3}{k^{2/3}}}\right]$

$$= \frac{1}{4}\left[4 - \frac{2}{k^{2/3}} + \frac{2}{k^{1/3}} \underbrace{\sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}}}_{>1 \; (k \geq 2)}\right] > \frac{1}{4}\left[4 \underbrace{- \frac{2}{k^{2/3}} + \frac{2}{k^{1/3}}}_{>0 \; (k \geq 2)}\right] > \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

c) donc $x^{(k)} = \begin{bmatrix}0\\ \left(-\frac{1}{k^{1/3}} - \sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}}\right) \times \frac{1}{2}\end{bmatrix} \xrightarrow{k \to \infty} \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

1 $x^{(k)}$ admet une limite. Par th. de cours, cette limite est solution de (P)

d) $\lambda^{(k)} = 2\mu_k g^+(x^{(k)}) = 2 \times \underbrace{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{k^{-1/3} - k^{-1}}}_{\mu_k} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{4}\left[4 - \dfrac{2}{k^{2/3}} + \dfrac{2}{k^{1/3}}\sqrt{4 - \dfrac{3}{k^{2/3}}}\right] - 1\right)}_{g(x^{(k)})} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{k^{-1/3} - k^{-1}} \times \left[-\dfrac{1}{2k^{2/3}} + \dfrac{1}{2k^{1/3}}\sqrt{4 - \dfrac{3}{k^{2/3}}}\right] =$

2 $$= \frac{1}{2} \times \left[-\frac{1}{\underset{\downarrow\,\infty}{2k^{1/3}} - \underset{\downarrow\,0}{2k^{-1/3}}} + \frac{1}{\underset{\downarrow\,0}{2 - 2k^{-2/3}}} \underset{\downarrow\,\infty}{\sqrt{4 - \frac{3}{k^{2/3}}}}\right] \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{2} \times \left[0 + \frac{1}{2}\sqrt{4}\right] = \frac{1}{2}$$

1

vérification : Kuhn-Tucker

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2 \times (-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ (x_1^2 + x_2^2 - 1) \times \lambda = 0 \end{cases}$$

Exemple : (P) minimiser $f = x_1 + x_2$ s.c. $x_1^2 - x_2 \leq 2$

$\mu_k = k$ $g(x) = x_1^2 - x_2 - 2$

$q(x, k) = f(x) + k\,(g^+(x))^2$

on résout minimiser $q(x, k)$ $x \in \mathbb{R}^n$

solution x_k = point critique

$\nabla q(x, k) = \nabla f(x) + 2k\, g^+(x)\, \nabla g(x) =$

si x_k t.q. $g(x_k) \leq 0$.

$\nabla f(x_k) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ impossible

si x_k t.q. $g(x_k) \geq 0$

$\nabla f(x_k) + 2k\, g(x_k)\, \nabla g(x_k) = 0$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2k\,(x_1^2 - x_2 - 2) \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$

$1 + 2k(x_1^2 - x_2 - 2)\,2x_1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 + 2k\left(\frac{1}{2k}\right)2x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x}$

$1 - 2k(x_1^2 - x_2 - 2) = 0 \Rightarrow x_1^2 - x_2 - 2 = \frac{1}{2k}$

$\frac{1}{4} - x_2 - 2 = \frac{1}{2k} \rightarrow x_2 = \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{2k} = \boxed{-\frac{7}{4} - \frac{1}{2k}}$

vérif $g(x_k) \geq 0$ $\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{7}{4}}_{2} + \frac{1}{2k} \geq 2$

$x_k = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\frac{7}{4} - \frac{1}{2k} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1/2 \\ -7/4 \end{bmatrix}$ (x_k) convergente, d'après le Th 1 converge vers solution de (

remarquer que f n'est pas coercive.

$2k\, g^+(x_k) \rightarrow 2k \times \frac{1}{2k} = 1$ K.T. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \times \left[-\frac{1}{2}\right] \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$

$\rightarrow \lambda = 1$

Résoudre le pb par la méthode de pénalité de Beltrami en se ramenant à un pb d'égalité
(P)

(P) $\min f = x_1 + x_2$ s.c. $x_1^2 - x_2 \leq 2$

$\Leftrightarrow \min f = x_1 + x_2$ s.c. $x_1^2 - x_2 + s^2 = 2$

pénalité de Beltrami $(x_1^2 - x_2 + s^2 - 2)^2$

(P_k) $\min f + k(x_1^2 - x_2 + s^2 - 2)^2 = q(x_1, x_2, s)$ pb sans contrainte

fonction convexe → recherche point critique.

$$\begin{array}{l} \frac{q}{x_1} \\ \frac{q}{x_2} \\ \frac{q}{s} \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2(k)(x_1^2 - x_2 + s^2 - 2) \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \\ 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

(3) $\Rightarrow s = 0$ ou $x_1^2 - x_2 + s^2 - 2 = 0$

<u>cas</u> $s = 0$ $\quad 1 + 2k(x_1^2 - x_2 - 2)\, 2x_1 = 0 \quad (1)$ on se retrouve dans le cas de l'exo précédent.

$1 + 2k(x_1^2 - x_2 - 2)(-1) = 0 \quad (2)$

$(1) + 2x_1(2) = 1 + 2x_1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$

$(2) \rightarrow 2k(\frac{1}{4} - x_2 - 2) = 1 \rightarrow \frac{1}{4} - x_2 - 2 = \frac{1}{2k} \rightarrow x_2 = -\frac{7}{4} - \frac{1}{2k}$

$x_k = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\frac{7}{4} - \frac{1}{2k} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1/2 \\ -7/4 \end{bmatrix}$

<u>cas</u> $x_1^2 - x_2 + s^2 - 2 = 0$

(1) $\rightarrow 1 = 0$ impossible.

Méthode barrière

On considère le pb minimiser $f(x) = x_1 + x_2$ s.c. $g(x) = x_1^2 - x_2 - 2 \le 0$

Résoudre le pb par la méthode barrière avec comme barrière $B(x)$

a) $-\dfrac{1}{g(x)}$

b) $-\mathrm{Log}\,(-g(x))$

a) on considère la suite de pb : $\min \overbrace{x_1 + x_2}^{f(x)} \overbrace{- \frac{1}{k} \times \frac{1}{x_1^2 - x_2 - 2}}^{+\frac{1}{k}B(x)}$ t.q. $x_1^2 - x_2 - 2 < 0$

points critiques :
$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{k}\,\frac{2x_1}{(x_1^2 - x_2 - 2)^2} = 0 \;\to\; 1 + 2x_1 = 0 \;\to\; \boxed{x_1 = -\frac{1}{2}} \\ 1 - \underbrace{\frac{1}{k}\,\frac{1}{(x_1^2 - x_2 - 2)^2}}_{d_k} = 0 \;\to\; 1 = \frac{1}{k}\,\frac{1}{(x_1^2 - x_2 - 2)^2} \;\to\; 1 = \frac{1}{k}\,\frac{1}{\left(-x_2 - \frac{7}{4}\right)^2} \end{cases}$$

$\to k\left(x_2 + \frac{7}{4}\right)^2 = 1 \;\to\; k x_2^2 + \frac{7}{2} k x_2 + k\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 1 = 0$

$\Delta = k^2\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 4k\left(k\left(\frac{7}{4}\right)^2 - 1\right) = 4k \;\Rightarrow\; x_2 = \dfrac{-\frac{7}{2}k \pm 2\sqrt{k}}{2k} = -\frac{7}{4} \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$

on reporte dans $g(x)$: $\frac{1}{4} - \dfrac{-\frac{7}{2}k \pm 2\sqrt{k}}{2k} - 2 = \mp \frac{1}{\sqrt{k}}$ on retient $-\frac{1}{\sqrt{k}} < 0$

solution : $\begin{bmatrix} -1/2 \\ -\frac{7}{4} + \frac{1}{\sqrt{k}} \end{bmatrix} \xrightarrow{k} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$

d_k approxime multiplicateur de Lagrange

$d_k = \frac{1}{k} \times (\sqrt{k})^2 \to 1$

b) on considère la suite de pb : $\min \overbrace{x_1 + x_2}^{f(x)} \overbrace{- \frac{1}{k}\,\mathrm{Log}\left(-x_1^2 + x_2 + 2\right)}^{+\frac{1}{k}B(x)}$ t.q. $x_1^2 - x_2 - 2 < 0$

points critiques :
$$\begin{cases} 1 - \overbrace{\frac{1}{k}}^{d_k}\,\frac{-2x_1}{-x_1^2 + x_2 + 2} = 0 \;\to\; 1 + 2x_1 = 0 \;\to\; \boxed{x_1 = -\frac{1}{2}} \\ 1 - \frac{1}{k}\,\frac{1}{-x_1^2 + x_2 + 2} = 0 \;\to\; 1 = \frac{1}{k}\,\frac{1}{-x_1^2 + x_2 + 2} \;\to\; 1 = \frac{1}{k}\,\frac{1}{x_2 + \frac{7}{4}} \end{cases}$$

$\to k\left(x_2 + \frac{7}{4}\right) = 1 \;\to\; x_2 = -\frac{7}{4} + \frac{1}{k}$

on reporte dans $g(x)$ $\quad \frac{1}{4} + \frac{7}{4} - \frac{1}{k} - 2 = -\frac{1}{k}$ donc $0 < -g(x) = \frac{1}{k} \le 1$ → Log est positif.

solution : $\begin{bmatrix} -1/2 \\ -\frac{7}{4} + \frac{1}{k} \end{bmatrix} \xrightarrow{k} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$ $\quad$ multiplicateur de Lagrange : $d_k = \frac{1}{k} \times k \to 1$

Méthode de pénalité

\- pénalité exacte.

Soit le pb (P) minimiser $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2y$ s.c. $x+y=2$

On pose $h(x,y) = x+y-2$

1) Ecrire et résoudre les conditions de K.T.

2) Résoudre le pb (P) par la méthode des pénalités de Beltrami i.e. $P(x,y) = \left(h(x,y)\right)^2$

Retrouver le multiplicateur de Lagrange solution des conditions de K.T.

3) Résoudre le pb (P) par la méthode des pénalités de la Valeur Absolue ie. $P(x,y) = |h(x,y)|$

On montrera que $\forall k \geq 2$ cette méthode donne la solution du pb (P).

Pour ce faire on montrera que $f(x,y) + k|h(x,y)| \geq 0$ et que la valeur zéro est atteinte $\forall k \geq 2$.
~~et que pour k≥2 atteint~~ par la solution de (P).

Indications: soit $c' \geq c \geq 0$ alors $cX + c'|X| \geq 0$ ~~et nulle ssi X = 0 (X∈ℝ)~~

la forme quadratique $X^2 + XY + Y^2$ est définie positive $(X, Y \in \mathbb{R}^2)$.

1) K.T. $\begin{cases} 2x+y+\mu = 0 \\ 2y+x-2+\mu=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{2x+2y}_{4} + \underbrace{y+x}_{2} + 2\mu = 2 \Rightarrow 2\mu = 2-6 \Rightarrow \boxed{\mu=-2}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=2 \\ 4y+2x-4=4 \end{cases} \Rightarrow y-4y=-6 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=0}$

2) Résoudre minimum de $x^2+xy+y^2-2y+k(x+y-2)^2$ (sans contraintes)

point critique $\begin{cases} 2x+y+2k(x+y-2)=0 \\ 2y+x-2+2k(x+y-2)=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+y = 2y+x-2 \Rightarrow x+2=y$

$\Rightarrow (2+2k)x + (x+2)(1+2k) = 4k \Rightarrow x(3+4k) = \cancel{4k} - 2 - \cancel{4k} \Rightarrow \boxed{x_k = -\frac{2}{3+4k}} \Rightarrow \boxed{y_k = 2+x_k}$

la suite $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ est CV donc converge d'après th. vers la solution de (P).

$x_k \xrightarrow{k} 0$ et $y_k \xrightarrow{k} 2$

multiplicateur de Lagrange: $2k\, h(x_k,y_k) = 2k\left(\frac{-4}{3+4k}\right) \xrightarrow{k} -\frac{8}{4} = -2$

3) $x^2+xy+y^2-2y+k|x+y-2| = \overbrace{x^2+xy+y^2-2x-4y+4}+2(x+y-2)+k|x+y-2|$

$= \underbrace{x^2+x(y-2)+(y-2)^2}_{(1)} + \underbrace{2(x+y-2)+k|x+y-2|}_{(2)} \geq 0 \quad \forall k\geq 2.$

(1) ≥ 0 et $=0$ ssi $x=0$ et $y-2=0$ pour $k \geq 2$ (2) ≥ 0 et nulle si $\begin{cases} x=0 \\ y-2=0 \end{cases}$.

Contrôle Optimisation Mathématique
(Septembre de l'an 2001)

Tout document autorisé.
Calculette électronique interdite.

Problème 1 (sur 7)

Une boîte rectangulaire doit être construite. On désigne par x_1, x_2, x_3 les dimensions de la boîte: x_3 est la hauteur de la boîte, x_1 et x_2 sont les dimensions du fond de la boîte.
La boîte n'a pas de couvercle. Les côtés et le fond de la boîte seront fait en un métal coûtant 1F au centimètre carré. On veut construire une boîte de coût minimum et de volume au moins 10 centimètres cube.

1) Formuler le problème.
2) On a à résoudre un programme géométrique comportant une contrainte. Montrer que nécessairement toute solution optimale vérifie $x_3 = \frac{10}{(x_1 x_2)}$. Se ramener alors à un programme géométrique sans contrainte en les variables x_1 et x_2 que l'on formulera.
3) Résoudre le dual (géométrique) de ce programme géométrique sans contrainte et en déduire la solution du primal puis donner les dimensions optimales de la boîte.

Problème 2 (sur 13)

Un nouvel entrepôt doit être placé de sorte que la somme des carrés des distances à 4 entrepôts déjà existant soit minimisée.
Les 4 entrepôts sont localisés aux points (1,2), (-2,4), (2,6) et (-6,-3).
On note x_1 , x_2 les coordonnées du nouvel entrepôt .
I.1) Formuler le problème.
I.2) On note f la fonction à minimiser. Montrer que f est convexe.
I.3) Résoudre le problème en cherchant un point critique de f.

On suppose maintenant que les coordonnées doivent satisfaire la contrainte $x_1+x_2 \geq 2$. On note (P) le problème résultant c'est-à-dire minimiser $f(x)$ s.c. $x_1+x_2 \geq 2$.
II.1) Résoudre le problème à l'aide des conditions de Kuhn-Tucker. Donner la valeur du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte.
II.2) On va résoudre le problème par la méthode barrière logarithmique de Frisch.
Trouver $\min_x q(x) = f(x) - \frac{1}{k}\ln(x_1+x_2-2)$ s.c. $x_1+x_2>2$ en cherchant un point critique de $q(x)$ satisfaisant $x_1+x_2>2$. Faisant tendre k vers l'infini, retrouver la solution de (P).
II.3) On va résoudre le problème par la méthode de pénalité de Beltrami. Pour cela, on rajoute une variable s pour transformer la contrainte d'inégalité de (P) en une contrainte d'égalité c'est-à-dire telle que $x_1+x_2=s^2+2$.
Trouver $\min_{x,s} q(x,s) = f(x) + k(-x_1-x_2+s^2+2)^2$ en cherchant un point critique de $q(x,s)$.
Faisant tendre k vers l'infini, retrouver la solution de (P).

$$f = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_1+2)^2 + (x_2-4)^2 + (x_1-2)^2 + (x_2-6)^2 + (x_1+6)^2 + (x_2+3)^2$$

$$= 4(x_1^2 + x_2^2) + 10x_1 - 18x_2 + \text{constante}$$

1 pt

$H_f = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ défini positif. $\Rightarrow$ strict^t. convexe. 1 pt

pt critique : $\begin{cases} 8x_1 + 10 = 0 \\ 8x_2 - 18 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = -5/4 \\ x_2 = 9/4 \end{matrix}$ 1 pt

contrainte $x_1 + x_2 \geq 2 \rightarrow -x_1 - x_2 + 2 \leq 0$

Kühn-Tücker $\begin{cases} 8x_1 + 10 - \lambda = 0 \\ 8x_2 - 18 - \lambda = 0 \\ \lambda \times (x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$

pour $\lambda = 0$ on retrouve la solution de I qui ne vérifie pas la contrainte

pour $\lambda > 0$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ 8x_1 - 8x_2 + 28 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{11}{4} \end{cases} \rightarrow \lambda = 4$ 2 pts

méthode barrière

min. $4x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_1 - 18x_2 - \frac{1}{k}\mathrm{Log}(x_1 + x_2 - 2)$ s.c. $x_1 + x_2 > 2$

ique $\begin{cases} 8x_1 + 10 - \frac{1}{k} \times \frac{1}{x_1+x_2-2} = 0 \\ 8x_2 - 18 - \frac{1}{k} \times \frac{1}{x_1+x_2-2} = 0 \end{cases} \rightarrow$ $8x_1 - 8x_2 + 28 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 - 7/2$

$\rightarrow 8x_2 - 18 - \frac{1}{k} \times \frac{1}{2x_2 - \frac{11}{2}} = 0 \rightarrow (8x_2 - 18)(2x_2 - \frac{11}{2}) = \frac{1}{k}$

$\Rightarrow x_2 = \frac{10}{4} \pm \frac{\sqrt{1+1/k}}{4} \rightarrow x_1 = -1 \pm \frac{\sqrt{1+1/k}}{4} \rightarrow x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{1+1/k}}{2}$

avec + $x_1 + x_2 > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ BON

avec − $x_1 + x_2 < \frac{3}{2} < 2$

$k \to \infty$ $x_2 = \frac{11}{4}$, $x_1 = -\frac{3}{4}$ 4 pts

$\frac{1}{k} \times \frac{1}{-\frac{1}{2} + \sqrt{1+1/k} \times \frac{1}{2}}$, $\rightarrow \frac{1}{k} \times \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)} = 4 = \lambda$ dév limité : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$

méthode pénalité

min. $4x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_1 - 18x_2 + k(-x_1 - x_2 + s^2 + 2)^2$

t itique $\begin{cases} 8x_1 + 10 - 2k(-x_1 - x_2 + s^2 + 2) = 0 \\ 8x_2 - 18 - 2k(-x_1 - x_2 + s^2 + 2) = 0 \\ 4k(-x_1 - x_2 + s^2 + 2)s = 0 \end{cases}$

pour $s = 0$ $\begin{cases} 8x_1 + 10 - 2k(-x_1 - x_2 + 2) = 0 \\ 8x_2 - 18 - 2k(-x_1 - x_2 + 2) = 0 \end{cases} \rightarrow$ $8x_1 - 8x_2 + 28 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 - 7/2$

$8x_2 - 18 - 2k\left(-2x_2 + \frac{22}{4}\right) = 0 \rightarrow x_2 = \frac{11k + 18}{4k + 8}$ $x_1 = x_2 - 7/2$

$k \to \infty$ $x_1 = -3/4$, $x_2 = \frac{11}{4}$

pour $-x_1 - x_2 + s^2 + 2 = 0$ $\begin{cases} 8x_1 + 10 = 0 \\ 8x_2 - 18 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5/4 \\ x_2 = 9/4 \end{cases} \rightarrow s^2 = 1 - 2 < 0$ impossible

$$2k\left(-\frac{11k+18}{4k+8} \times 2 + \frac{7}{2} + 2\right) \rightarrow 2k\left(\frac{-11 \times 2k - 18 \times 2 + \left(\frac{7}{2}+2\right)(4k+8)}{4k+8}\right)$$ 4 pts

$$= 2k\,\frac{\left(-18 \times 2 + \left(\frac{7}{2}+2\right)8\right)}{4k+8}$$

$$\rightarrow \frac{-18 \times 2 + (7/2 + 2)8}{2} = -18 + \left(\frac{7}{2}+2\right)4 = 4 = \lambda$$

$\min \quad 4x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_1 - 18x_2 \quad$ s.c. $\quad x_1 + x_2 \geq 2$

$$g^+(x) = \max\{0, \underbrace{2 - x_1 - x_2}_{g(x) = 2 - x_1 - x_2}\}$$

$$\nabla f + k\,2g^+ \nabla g = \begin{bmatrix} 8x_1 + 10 \\ 8x_2 - 18 \end{bmatrix} + 2k\,(2 - x_1 - x_2)^+ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

- si $g^+ = 0 \to \begin{matrix} 8x_1 = -10 \\ 8x_2 = +18 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -10/8 \\ x_2 = +18/8 \end{matrix}$ alors $x_1 + x_2 = 1$ et $g^+ \neq 0$ <u>contradiction</u>.

- si $g^+ = g \quad \begin{bmatrix} 8x_1 + 10 \\ 8x_2 - 18 \end{bmatrix} + 2k(2 - x_1 - x_2)\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

$(1) - (2) \to 8x_1 + 10 - 8x_2 + 18 = 0 \to x_1 = \dfrac{-28 + 8x_2}{8} = \boxed{\dfrac{2x_2 - 7}{2}}$

$(2) \to 8x_2 - 18 + 2k\left(2 - \dfrac{2x_2 - 7}{2} - x_2\right)(-1) = 0$

$\frac{1}{2}(4 - 2x_2 + 7 - 2x_2)$

$x_2(8 + 4k) = 18 + 11k \to \boxed{x_2 = \dfrac{11k + 18}{4k + 8}} \longrightarrow \dfrac{11}{4}$

$$x_1 = \left(\frac{22k + 18 \times 2}{4k+8} - 7\right) \times \frac{1}{2} = \left(\frac{22k + 18 \times 2 - 28k - 8 \times 7}{4k+8}\right)\frac{1}{2} = \boxed{\frac{-6k + 18 \times 2 - 8 \times 7}{8k + 16}} \to -\frac{3}{4}$$

<u>multiplicateur lagrange :</u>

$$2 - x_1 - x_2 = 2 - \frac{-3k + 18 - 4 \times 7}{4k+8} - \frac{11k + 18}{4k+8} = \frac{8k + 16 + 3k - 18 + 4 \times 7 - 11k - 18}{4k+8} = \frac{+8}{4k+8}$$

$$2k \times g^+ = 2k(2 - x_1 - x_2) = \frac{16 \times k}{4k+8} \longrightarrow 4$$

II. Méthode de pénalité ε-approchée

Soient $f: R^n \to [c, +\infty[$, continue (c est donc une constante telle que $c \le f(x)\ \forall x \in R^n$) et $S \subset R^n$.
On considère le problème (P) minimiser $f(x)$, $x \in S$.
Soit la pénalité $P: R^n \to [0, +\infty[$, continue et telle que $P(x) = 0$ ssi $x \in S$.
Soit $\mu_{k \in N}$ une suite de réels croissants et strictement positifs. et tendant vers l'∞
On définit $q(x, \mu) = f(x) + \mu P(x)$.
On se fixe un $\varepsilon > 0$.
$\forall k \in N$, on suppose que $\min_{x \in R^n}\{q(x, \mu_k)\}$ existe c'est-à-dire qu'il existe x_k^* tel que $q(x_k^*, \mu_k) = \min_{x \in R^n}\{q(x, \mu_k)\}$
$\forall k \in N$, soit x_k tel que $q(x_k, \mu_k) \le q(x_k^*, \mu_k) + \varepsilon$
Supposons que la suite x_k converge vers $\bar{x}$ et que le problème (P) admette une solution x^*.

Montrer que $\bar{x} \in S$ et que $f(\bar{x}) \le f(x^*) + \varepsilon$. (5 points)

III. Minimum global d'un problème

Les conditions de Kuhn-Tucker ne sont que des conditions nécessaires d'optimalité locale de

Méthode de pénalité ε-approchée

On considère le pb(P) minimiser $f(x), x\in S$ où f continue sur $\mathbb{R}^n$ et bornée inférieur c'est-à-dire $\exists c$ t.q $c\leq f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$

On considère la pénalité $P(x)$ continue sur $\mathbb{R}^n$, $P(x)\geq 0$, $P(x)=0 \Leftrightarrow x\in S$

On considère $\mu_k>0$ une suite croissante de réels positifs qui tendent vers l'infini.

Soit $q(x,\mu) = f(x)+\mu P(x)$ et $\varepsilon>0$ fixé.

$\forall k$, on suppose que $\min\limits_x \{q(x,\mu_k)\}$ existe c'est-à-dire $\exists x_k^*$ t.q. $q(x_k^*,\mu_k) = \min\limits_x \{q(x,\mu_k)\}$

$\forall k$, soit x_k t.q. $q(x_k,\mu_k)\leq q(x_k^*,\mu_k)+\varepsilon$

Supposons que (x_k) converge vers $\bar{x}$ et que le pb(P) admet une solution x^*

Montrer que $\bar{x}\in S$ et satisfait $f(\bar{x})\leq f(x^*)+\varepsilon$

$\forall k$ $f(x_k^*)+\mu_k P(x_k^*)\leq f(x^*)$ par déf. de x_k^* et car $x^*\in S$

$\Rightarrow c+\mu_k P(x_k)\leq f(x_k)+\mu_k P(x_k)\leq f(x_k^*)+\mu_k P(x_k^*)+\varepsilon\leq f(x^*)+\varepsilon$ — 2 pt.

$\Rightarrow 0\leq P(x_k)\leq \dfrac{f(x^*)+\varepsilon-c}{\mu_k} \Rightarrow \lim\limits_k P(x_k)=0$

P continue $\Rightarrow P(\bar{x}) = \lim P(x_k) = 0 \Rightarrow \bar{x}\in S$ — 1 pt

$\forall k$ $f(x_k)\leq f(x_k)+\underbrace{\mu_k P(x_k)}_{\geq 0}\leq f(x^*)+\varepsilon$

f continue $\Rightarrow \lim\limits_k f(x_k) = f(\bar{x})\leq f(x^*)+\varepsilon$ — 2 pt.

Pénalité de Beltrami.

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g \in C^1$ et $g^+(x) = \max\{0, g(x)\}$

Soit x^* t.q. $g(x^*) = 0$

1) Mq. 0, l'application linéaire nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, est la différentielle de $(g^+)^2$ en x^*
2) Mq. $(g^+)^2$ a des dérivées partielles continues en x^*
3) En déduire que $(g^+)^2$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n$
4) Exemple (voir derrière)

1) $$\frac{\left|(g^+)^2(x) - (g^+)^2(x^*) - 0\circ(x-x^*)\right|}{\|x-x^*\|} = \underbrace{\frac{(g^+)^2(x)}{\|x-x^*\|}}_{A} \geqslant 0$$ (déf. de la différentielle) la limite doit être nulle. $x \to x^*$

$$g^+(x) \leqslant |g(x)| \Rightarrow \underbrace{g^+(x)\frac{|g(x)|}{\|x-x^*\|}}_{B} \geqslant A$$

$$B = g^+(x)\frac{\left|g(x) - g(x^*) - u\circ(x-x^*) + u\circ(x-x^*)\right|}{\|x-x^*\|}$$ où u est la différentielle de g en x^*

$$\leqslant g^+(x)\frac{\left|g(x) - g(x^*) - u\circ(x-x^*)\right|}{\|x-x^*\|} + g^+(x)\frac{|u\circ(x-x^*)|}{\|x-x^*\|}$$

$$\leqslant \quad // \quad + g^+(x)\frac{\|u\|\,\cancel{\|x-x^*\|}}{\cancel{\|x-x^*\|}}$$

on passe à la limite $x \to x^*$: $g^+(x^*)\times \underset{\text{déf. de } u}{0} + g^+(x^*)\times\|u\| = 0$

et donc $0 \geqslant B \geqslant A \geqslant 0 \Rightarrow A = 0$ quand on passe à la limite.

2) 0 est la différentielle de $(g^+)^2$ en $x^* \Rightarrow \dfrac{\partial (g^+)^2}{\partial x_j}(x^*) = 0$ (dérivées partielles sont les composants de 0)

pour x t.q. $g(x) > 0$ $\quad g^+(x) = g(x) \Rightarrow \dfrac{\partial (g^+)^2}{\partial x_j}(x) = 2\,g(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_j} \xrightarrow{x \to x^*} 0$ car $g(x) \to 0$.

pour x t.q. $g(x) < 0$ $\quad g^+(x) = 0 \to \dfrac{\partial (g^+)^2}{\partial x_j}(x) = 0$

dans les 2 cas, $\dfrac{\partial (g^+)^2}{\partial x_j}(x) \to 0$ qd $x \to x^*$

3) Pour x t.q. $g(x) > 0$ $\quad g^+(x) = g(x) \Rightarrow (g^+)^2$ est C^1

Pour x t.q. $g(x) < 0$ $\quad g^+(x) = 0 \Rightarrow (g^+)^2$ est C^1

Pour x t.q. $g(x) = 0$ $\quad$ cf. 1 et 2

OPTIMISATION MATHÉMATIQUE

(2007)

Durée : **1 h 30 mn**

Documents autorisés **: polycopié et notes de cours**

Calculatrices **interdites**

A. On considère le problème :

$$(Q)\begin{cases} \text{Minimiser} & f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2 \\ \text{Sous les contraintes} & x_1+x_2\geq 1 \\ & x_1-2x_2\leq -1 \end{cases}$$

où $(x_1,x_2)\in\Re^2$.

(1) Mettre le problème (Q) sous la forme : min $f(x_1,x_2)$ s.c. $g_1(x_1,x_2)\leq 0$, $g_2(x_1,x_2)\leq 0$.

(2) Associer aux contraintes respectivement les deux multiplicateurs λ_1 , λ_2. Exprimer la fonction duale $\Theta\,(\lambda_1,\lambda_2)$ en fonction de λ_1 , λ_2.

(3) Donner l'expression du problème (D) dual de (Q). Résoudre (D) à l'aide des conditions nécessaires du premier ordre (Kuhn-Tucker) sans rechercher la qualification. Sont-elles suffisantes dans ce cas ?

2 (4) Montrer que le point $((x_1^*,x_2^*),(\lambda_1^*,\lambda_2^*))$ avec $x_1^*=\frac{1}{3}$, $x_2^*=\frac{2}{3}$, $\lambda_1^*=\frac{8}{9}$, $\lambda_2^*=\frac{2}{9}$, est un point selle pour la fonction de Lagrange. En déduire la solution de (Q).

B. Soit (P) le problème d'optimisation suivant :

$$(P)\begin{cases} \text{Minimiser} & f(x,y)=3x^2+y^2+xy-x \\ \text{Sous les contraintes} & g_1(x,y)=x+y\leq 0 \\ & g_2(x,y)=1-x\leq 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que le point $(1,-1)$ est qualifié et qu'il vérifie les conditions de Kuhn et Tucker.

(2) Pour tout $k\geq 1$ entier et pour tout $(x,y)\in\Re^2$, on définit la fonction :

$$f_k\,(x,y)=f(x,y)+k\left[\left(g_1^+(x,y)\right)^2+\left(g_2^+(x,y)\right)^2\right]$$

où $g_1^+(x,y)=\max\,(0,x+y)$ et $g_2^+(x,y)=\max\,(0,1-x)$.
Soit le problème (P_k) $\left\{\min_{(x,y)\in\Re^2}\ f_k\,(x,y)\right\}$.

4 (a) En supposant que $x+y>0$ et $1-x>0$, donner (x_k,y_k) la solution optimale de (P_k) en fonction de k. Vérifier que pour tout $k\geq 1$ on a $x_k+y_k>0$ et $1-x_k>0$, puis calculer la limite de la suite (x_k,y_k) lorsque k tend vers l'infini.

3 (b) Montrer que $\left(g_1^+(x,y)\right)^2$ et $\left(g_2^+(x,y)\right)^2$ sont convexes. En déduire que $f_k(x,y)$ est strictement convexe et que la solution (x_k,y_k) trouvée au (a) est l'unique solution de (P_k). En déduire une solution optimale de (P).

2 (c) Calculer les limites des suites $2kg_1^+\,(x_k,y_k)$ et $2kg_2^+\,(x_k,y_k)$ dans le cas où $x+y>0$ et $1-x>0$. Quelles valeurs retrouve-t-on ?

(P) $\min f(x,y) = 3x^2 + y^2 + xy - x$

s.c. $g_1(x,y) = x + y \leq 0$

$g_2(x,y) = 1 - x \leq 0$

1) M.q. le point $(1,-1)$ est qualifié et qu'il vérifie K.T.

2) Pour tout $k \geq 1$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit la fonction :

$$f_k(x,y) = f(x,y) + k\left[\left(g_1^+(x,y)\right)^2 + \left(g_2^+(x,y)\right)^2\right]$$

où $g_i^+ = \max(0, g_i)$ pour $i = 1,2$.

Soit le pb (P_k) : $\min\limits_{x,y} f_k(x,y)$

a) En supposant que $x+y>0$ et $1-x>0$, donner (x_k, y_k) la solution optimale de (P_k) en fonction de k. Vérifier que pour tout k, $x_k + y_k > 0$ et $1 - x_k > 0$, puis calculer la limite de la suite (x_k, y_k) quand $k \to +\infty$.

b) M.q. $\left(g_i^+(x,y)\right)^2$ sont convexes $i=1,2$. En déduire que $f_k(x,y)$ est strict^t convexe et que la solution (x_k, y_k) trouvée en a) est l'unique solution de (P_k). En déduire une solution optimale de (P).

c) Calculer les limites des suites $2k\, g_i^+(x_k, y_k)$ $i=1,2$ dans le cas où $x_k + y_k > 0$ et $1 - x_k > 0$. Quelles valeurs retrouve-t-on ?

1) $(1,-1)$ sature g_1 et g_2. $\nabla g_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\nabla g_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ sont lin^t ind^t. Donc $(1,-1)$ vérifie la qualification de l'indépendance linéaire.

$\nabla f = \begin{bmatrix}6x+y-1\\2y+x\end{bmatrix} \Rightarrow$ au point $(1,-1)$ K.T. $\Rightarrow \begin{bmatrix}6-1-1\\-2+1\end{bmatrix} + \lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4+\lambda_1-\lambda_2 = 0\\-1+\lambda_1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_2 = 5\\\lambda_1 = 1\end{cases}$

2) a) En supposant $x+y>0$ et $1-x>0$, on a $g_1^+ = x+y = g_1$ et $g_2^+ = 1-x = g_2$

$\Rightarrow \nabla f_k = \nabla f + 2k\, g_1 \nabla g_1 + 2k\, g_2 \nabla g_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}6x+y-1\\2y+x\end{bmatrix} + 2k[x+y]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 2k[1-x]\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{cases}x[6+4k] + y[1+2k] - 2k - 1 = 0\\ x[1+2k] + y[2+2k] = 0\end{cases} \to \boxed{x = -y\dfrac{[2+2k]}{1+2k}}$

$\to -y\dfrac{[2+2k]}{1+2k}[6+4k] + y[1+2k] - 2k - 1 = 0 \to -y\left\{[2+2k][6+4k] - (1+2k)^2\right\} = (1+2k)^2 \to \boxed{y = -\dfrac{(1+2k)^2}{[2+2k][6+4k] - (1+2k)^2}}$

$\lim\limits_k y_k = -\dfrac{(2k)^2}{8k^2 - (2k)^2} = \dfrac{-(2k)^2}{4k^2} = -1$, $\lim\limits_k x_k = -(-1) \times \dfrac{2k}{2k} = 1$

vérifier que $x_k + y_k > 0$ $\quad -y\dfrac{[2+2k]}{1+2k} - \dfrac{(1+2k)^2}{(2+2k)(6+4k) - (1+2k)^2} = \dfrac{(1+2k)(2+2k) - (1+2k)^2}{(2+2k)(6+4k) - (1+2k)^2} = \dfrac{(1+2k)[2+2k-1-2k]}{D} = \dfrac{1+2k}{D}$

$D > 0$ car $2+2k > 1+2k$ et $6+4k > 1+2k$

$1 - x_k > 0 \Leftrightarrow 1 > x_k \Leftrightarrow (1+2k) > -y[2+2k] = \dfrac{(1+2k)^2(2+2k)}{[2+2k][6+4k] - (1+2k)^2} \Leftrightarrow [2+2k][6+4k] - (1+2k)^2 > (1+2k)(2+2k)$ on sait que $D>0$

$[2+2k][6+4k] - (1+2k)^2 = (1+2k)[6+4k-1-2k] = (1+2k)(5+2k) > (1+2k)(2+2k)$

le premier membre est supérieur à $[1+2k][6+4k] - (1+2k)^2$

b) $g_i^+(x,y) = \max(h_1(x,y), h_2(x,y))$ où h_1 et h_2 sont convexes.

Montrons que $\max(h_1, h_2)$ est convexe : $\max\left\{h_1[(1-\lambda)x + \lambda y], h_2[(1-\lambda)x + \lambda y]\right\} \underset{\text{pour } i = 1 \text{ ou } 2}{\leq} h_i[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} h_i(x) + \underbrace{\lambda}_{\geq 0} h_i(y) \leq (1-\lambda)\max\{h_1(x), h_2(x)\} + \lambda \max\{h_1(y), h_2(y)\}$

la fonction $z \to z^2$ est convexe et croissante pour $z \geq 0$

par th. de composition de fonctions, on en déduit que $\left[g_i^+(x,y)\right]^2$ est convexe et $2k\left[g_i^+(x,y)\right]^2$ est convexe par multiplication par $2k > 0$

donc $\sum\limits_{i=1}^{2} 2k\, g_i^+(x,y)$ est convexe comme somme de 2 fonctions convexes.

Montrons que f est strict^t convexe : $Hf = \begin{pmatrix}6 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ $\quad \Delta_1 = 6$, $\Delta_2 = 11$ les 2 sont >0 donc Hf est déf >0 et donc f strict^t convexe.

Donc f_k est strict^t convexe $\Rightarrow$ elle admet un minimum unique $\Rightarrow$ qui ne peut être que celui trouvé en a)

donc (x_k, y_k) est le minimiseur de $f_k(x,y)$, par th. $(x_k, y_k) \xrightarrow[k]{}$ solution de (P)

c) $2k\, g_1^+ = 2k(x_k + y_k) = 2k \times \dfrac{1+2k}{D} \xrightarrow{k} \dfrac{4k^2}{8k^2 - (2k)^2} = 1$ on retrouve λ_1

$2k\, g_2^+ = 2k(1 - x_k) = 2k\left\{1 - \dfrac{(1+2k)(2+2k)}{(2+2k)(6+4k) - (1+2k)^2}\right\} = 2k\left[\dfrac{(2+2k)(6+4k) - (1+2k)^2 - (1+2k)(2+2k)}{(2+2k)(6+4k) - (1+2k)^2}\right] = 2k\left[\dfrac{12+12k+8k+8k^2-1-4k^2-4k-2-4k-2k-\dots}{D}\right]$

$= 2k\left[\dfrac{9+10k}{D}\right] \xrightarrow{k} \dfrac{20k^2}{8k^2 - 4k^2} = 5$ on retrouve λ_2