Optimisation Mathématique Mai 2014

Documents autorisés. Pas de calculette.

Exercice1. Qualification-Conditions de Kuhn_Tucker. (8 points)

On considère le problème suivant :

(P) $\min(x_1-1)^2+(x_2+1)^2-x_1-x_2$

$$\text{s.c.}\begin{cases}(x_1-1)^2-x_2\leq 0 & (1)\\ x_1^2+x_2^2-1\leq 0 & (2)\end{cases}$$

Soit $x^*=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

1-Donner I(x*) l'ensemble des numéros des contraintes saturées par x* (satisfaites avec égalité par x*).

2-x* est-il qualifié ? Les conditions de Kuhn-Tucker sont-elles des conditions nécessaires d'optimalité pour x* et pourquoi ?

3-Montrer que x* vérifie les conditions de Kuhn-Tucker.

4-Montrer que (x^*,λ_1,λ_2) avec λ_1=1, λ_2=½ est un point selle de la fonction de Lagrange. En déduire la solution de (P).

Exercice2. Méthode de pénalité.,(5 points)

Appliquer la méthode de pénalité de Beltrami au problème suivant :

(P) $\min \quad x_1^2+x_2^2+x_1x_2$

s.c. $1-2x_1-x_2\leq 0$

Exercice3. Dualité lagrangienne. (7 points)

On considère le problème en variables 0-1 suivant :

(P) $\min \quad f(x)=2x_1+x_2$

$$\text{s.c.}\begin{cases}2x_1+3x_2\geq 4 & (0)\\ x\in X=\{0,1\}^2\end{cases}$$

On relâche la contrainte (0) et on obtient le problème dual lagrangien :

(D) $\max_{\lambda_0\geq 0}\theta(\lambda_0)$

Où $\theta(\lambda_0)=\min_{x\in X}2x_1+x_2+\lambda_0(4-2x_1-3x_2)$

 Tourner la page SVP

1-Montrer que $\theta(\lambda_0) = \min \ \{4\lambda_0,\ 2 + 2\lambda_0,\ 1 + \lambda_0,\ 3 - \lambda_0\}$

2-Représenter graphiquement la fonction $\theta(\lambda_0)$. Vérifier qu'elle est concave.

A partir de la représentation graphique, résoudre le problème (D). Y-a-t-il un saut de dualité ?

On considère maintenant le problème :

$$(\bar{P}) \qquad \min \quad f(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 4 & (0) \\ x \in \bar{X} = [0,1]^2 \end{cases}$$

$(\bar{P})$ est la relaxation de (P) dans laquelle les conditions d'intégrité des variables ont été relâchées.

Soit $x^* = \binom{1/2}{1}$.

On relâche la contrainte (0) de $(\bar{P})$ et on obtient le problème dual lagrangien :

$$(\bar{D}) \qquad \max_{\lambda_0 \geq 0} \bar{\theta}(\lambda_0)$$

Où $\bar{\theta}(\lambda_0) = \min_{x \in \bar{X}} 2x_1 + x_2 + \lambda_0(4 - 2x_1 - 3x_2)$

3-Calculer $\bar{\theta}(1)$. λ_0=1 est-il solution optimale de $(\bar{D})$ et x* est-il solution optimale de $(\bar{P})$? Y-a-t-il un saut de dualité ?