Méthode des Caractéristiques

Une diffusion nulle équivaut à $k=0$

D'où : $\frac{\partial c}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial vc}{\partial x}(x,t)=0$

D'autre part, la vitesse du vent est constante : $v(x,t)=cste$

D'où : $\frac{\partial c}{\partial t}(x,t)+v\frac{\partial c}{\partial x}(x,t)=0$ (1)

- On applique la règle de la chaîne : $\boxed{\frac{\partial c}{\partial s}(x(s),t(s))=\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s}(x,t)+\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}(x,t)}$

- Avec $\frac{\partial t}{\partial s}=1$ et $\frac{\partial x}{\partial s}=v$, on a l'équation : $\frac{\partial c}{\partial s}(x(s),t(s))=\frac{\partial c}{\partial t}(x,t)+v\frac{\partial c}{\partial x}(x,t)=0$ d'après (1)

  On en déduit que $\boldsymbol{t(s)=s+C_1}$ et $\boldsymbol{x(s)=vs+C_2}$ (avec C_1 et C_2 deux constantes).

  On en déduit que résoudre (1) équivaut à résoudre $\frac{\partial c}{\partial s}(x(s),t(s))=0$.

- On pose $t(0)=0$ et $x(0)=x_0$.

  Alors $t(s)=s$ et $x(s)=x_0+vs=x_0+vt$.

  D'où $\frac{\partial c}{\partial s}(x(s),t(s))=0\Leftrightarrow\frac{\partial c}{\partial s}(x_0+vs)=0\Leftrightarrow c(s)=cste$

  Donc la solution est une constante selon s, ainsi la valeur à l'origine de c donne la solution du problème : $c(x,t)=c_0(x_0)=(1-|x_0-1|)1_{[0,2]}(x)=(1-|x_0-vt-1|)1_{[0,2]}(x)$

  Solution exacte du problème : $\boxed{c(x,t)=c(x-vt)=(1-|x-vt-1|)1_{[0,2]}(x)}$

Méthode des différences finies

- Schéma numérique :

  Écrire $\frac{\partial c}{\partial t}(x_i,t_n)+v\frac{\partial c}{\partial x}(x_i,t_n)$ revient à écrire $\frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+v\frac{C_i^n-C_{i-1}^n}{\Delta x}=0$

- Matriciellement, on a :

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+v\frac{C_i^n-C_{i-1}^n}{\Delta x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (C_i^{n+1})_i-(C_i^n)_i=v\frac{\Delta t}{\Delta x}((C_{i-1}^n)_{i-1}-(C_i^n)_i)$$

$$\Leftrightarrow\quad (C_i^{n+1})_i=(1-v\frac{\Delta t}{\Delta x})(C_i^n)_i+v\frac{\Delta t}{\Delta x}(C_i-1^n)_{i-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(C_i^{n+1})_i=(1-p)(C_i^n)_i+p(C_{i-1})_{i-1}}$$

Ainsi, la (n+1)ième itération est égale à la (n)ième + 1 fonction qui dépend du (n)ième. (U_{n+1} = U_n + f(U_n)).

Le schéma est donc explicite.

- Convergence du schéma :
  On rappelle que dire qu'un schéma est convergent équivaut à dire qu'il est <u>stable et consistant</u>.

  On vérifie d'abord la consistance :
  $$(C_i^{n+1})_i=(1-p)(C_i^n)_i+p(C_{i-1}^n)_i$$
  $$(C_i^{n+1})_i=(1-p)(C_i^n)_i+h\Phi((C_{i+1}^n)_{i-1},h)=(1-p)(C_i^n)_i+hf((C_i^n)_i)$$
  d'où : $\Phi((C_i^n)_i,0)=f((C_i^n)_i)$ Donc le schéma est consistant.

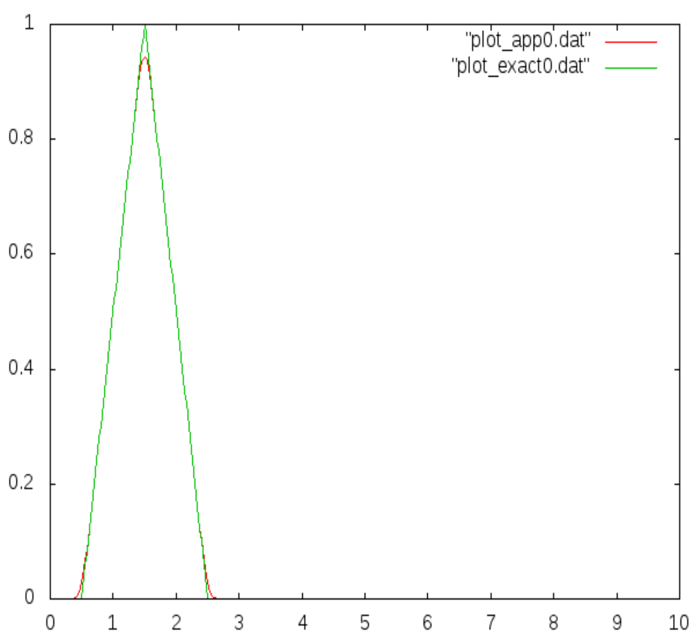
  On vérifie ensuite la stabilité :
  Pour qu'une méthode soit stable, il suffit que Φ soit lipschitzienne par rapport à (C).
  $$\|f((C_i^{n+1})_i)-f((C_i^n)_i)\|=cste[(C_{i-1}^{n+1})_{i-1}-(C_i^{n+1})_i-(C_{i-1}^n)_{i-1}+(C_i^n)_i]$$
  $$\leqslant cste[\|(C_{i-1}^{n+1})_{i-1}-(C_i^{n+1})_i\|+\|(C_{i-1}^n)_{i-1}+(C_i^n)_i\|]$$
  $$\leqslant cste\|(C_{i-1}^{n+1})_{i-1}-(C_i^{n+1})_i\|$$
  Donc f est lipschitzienne, ainsi le schéma est stable.

  Le schéma est donc convergent (car consistant et stable).

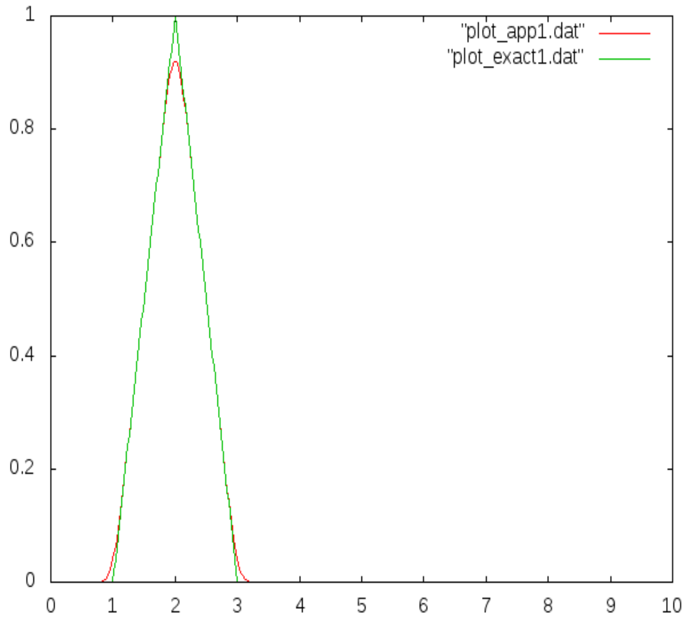
- voir programme

- Solution exacte du problème : $c(x,t)=(1-|x-vt-1|)\,1_{[0,2]}$

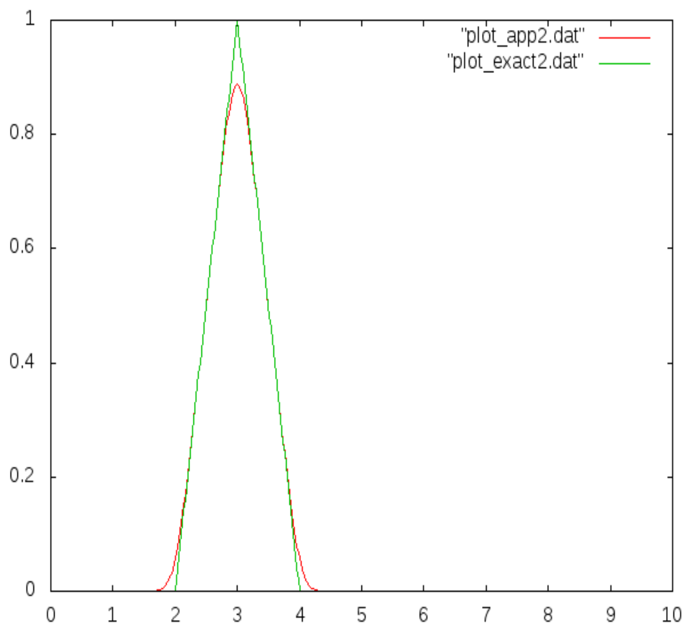
- Rendu GnuPlot :



La solution exacte est proche de la solution approchée.
Coefficient de diffusion k=0
Vent constant v=1
$\Delta x=2.10^{-2}$
$\Delta t=10^{-2}$
Cas t=0.5


"plot_app1.dat"
"plot_exact1.dat"
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Cas t = 1


"plot_app2.dat"
"plot_exact2.dat"
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Cas t = 2

Paramètre de diffusion non nul

schéma numérique : diffusion du nuage ≠ 0

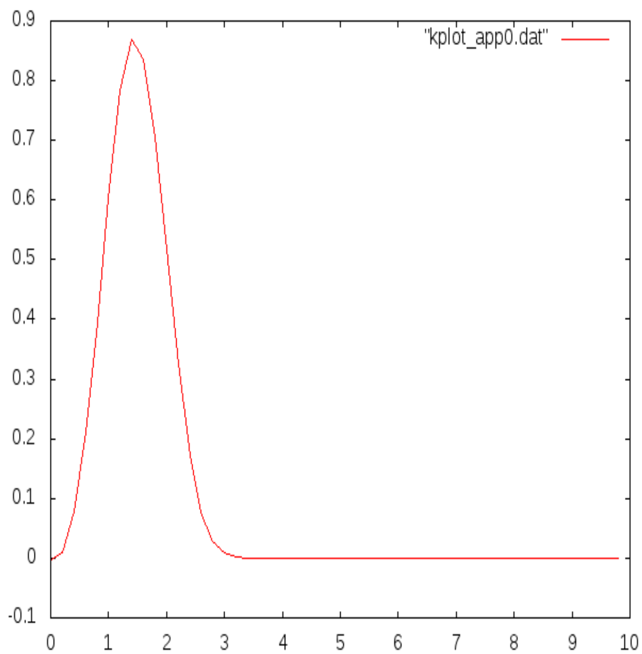
$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t)+v\frac{\partial c}{\partial x}(x,t)+k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t)=0 \Leftrightarrow \frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+v\frac{C_i^n-C_{i-1}^n}{\Delta x}+k\frac{C_{i-1}^n-2C_i^n+C_{i+1}^n}{\Delta x^2}=0$$

Matriciellement, on a :

$$\frac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+v\frac{C_i^n-C_{i-1}^n}{\Delta x}+k\frac{C_{i-1}^n-2C_i^n}{\Delta x^2}+k\frac{C_{i+1}^n}{\Delta x^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{C_{i+1}^n-C_i^n}{\Delta t}=v\frac{C_i^n-C_{i-1}^n}{\Delta x}+k\frac{C_{i-1}^n-2C_i^n}{\Delta x^2}+k\frac{C_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{C_i^{n+1}=C_i^n[1-v\frac{\Delta t}{\Delta x}+2\frac{\Delta t}{\Delta x^2}]+C_{i+1}^n[-k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}]-C_{i-1}^n[v\frac{\Delta t}{\Delta x}-\frac{\Delta t}{\Delta x^2}]}$$

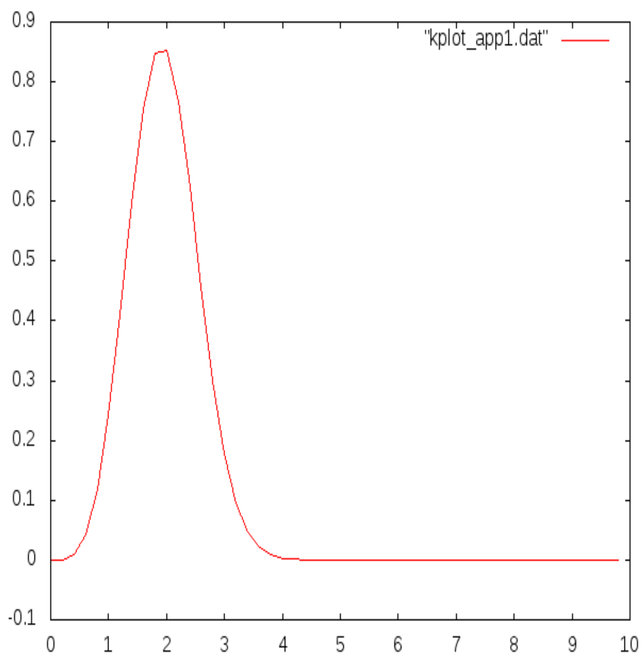


coefficient de diffusion k=0.01

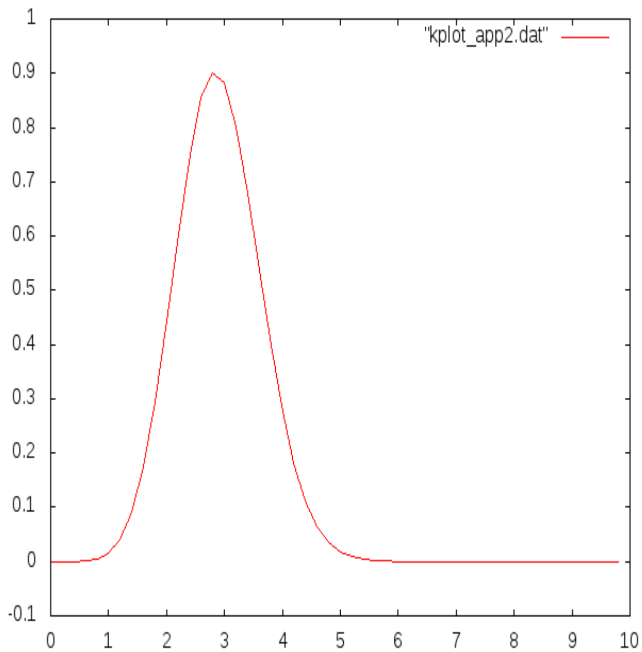
Δx=0.2

Δt=0.01

Cas t=0.5



Cas t = 1



Cas t = 2

Vitesse du vent non constante

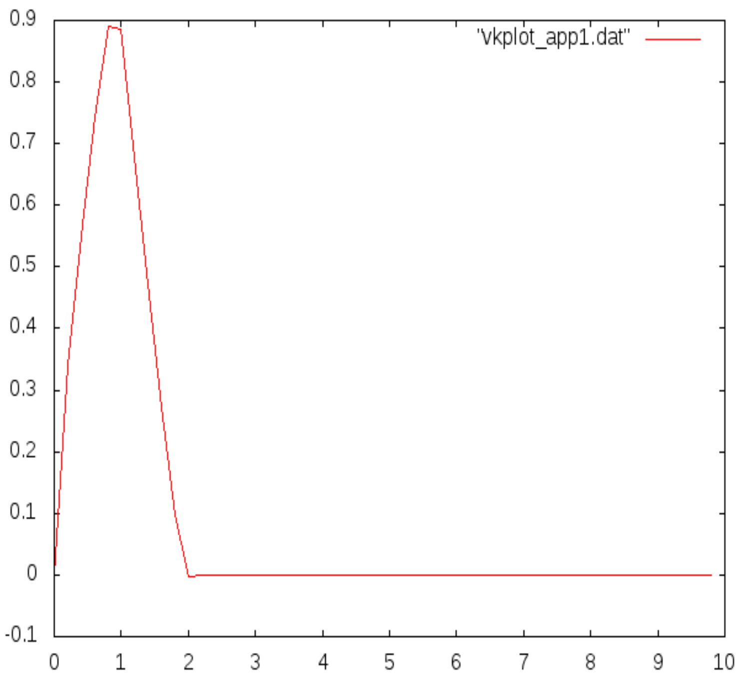
$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial(v c)}{\partial x}(x,t)+k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t)=0$$

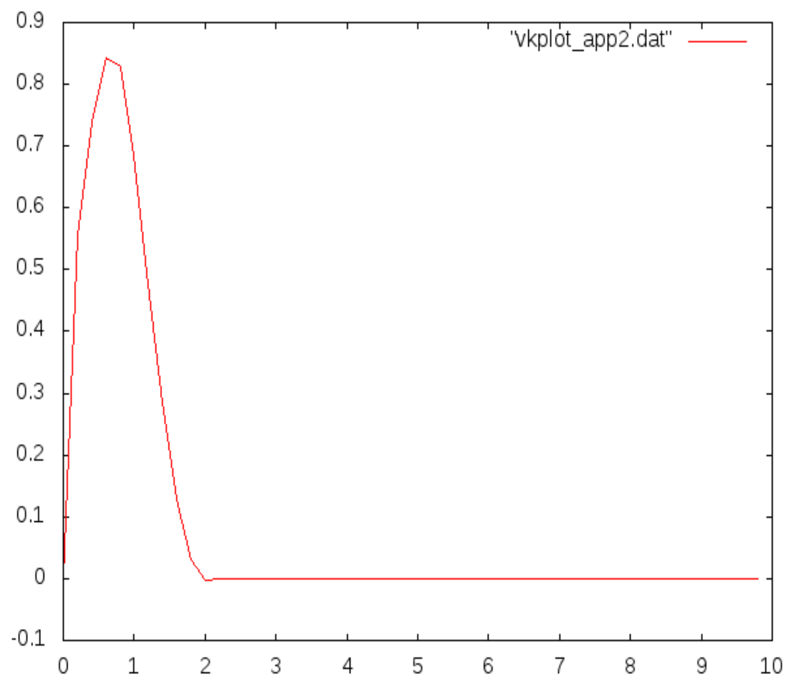
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+V_i^n\dfrac{C_{i+1}^n-C_i^n}{\Delta x}+k\dfrac{(C_{i-1}^n-2C_i^n+C_{i+1}^n)}{\Delta x^2}=0 \quad si \quad V_i^n<0 \\[2ex] \dfrac{C_i^{n+1}-C_i^n}{\Delta t}+V_i^n\dfrac{C_i^n-C_{i-1}^n}{\Delta x}+k\dfrac{(C_{i-1}^n-2C_i^n+C_{i+1}^n)}{\Delta x^2}=0 \quad si \quad V_i^n>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_i^{n+1}=C_i^n\left(1+\dfrac{\Delta t}{\Delta x}V_i^n+2k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+C_{i+1}^n\left(-V_i^n\dfrac{\Delta t}{\Delta x}-k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+C_{i-1}^n\left(-k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) \quad si \quad V_i^n<0 \\[2ex] C_i^{n+1}=C_i^n\left(1-\dfrac{\Delta t}{\Delta x}V_i^n+2k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+C_{i+1}^n\left(V_i^n\dfrac{\Delta t}{\Delta x}-k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+C_{i-1}^n\left(-k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) \quad si \quad V_i^n>0 \end{cases}$$

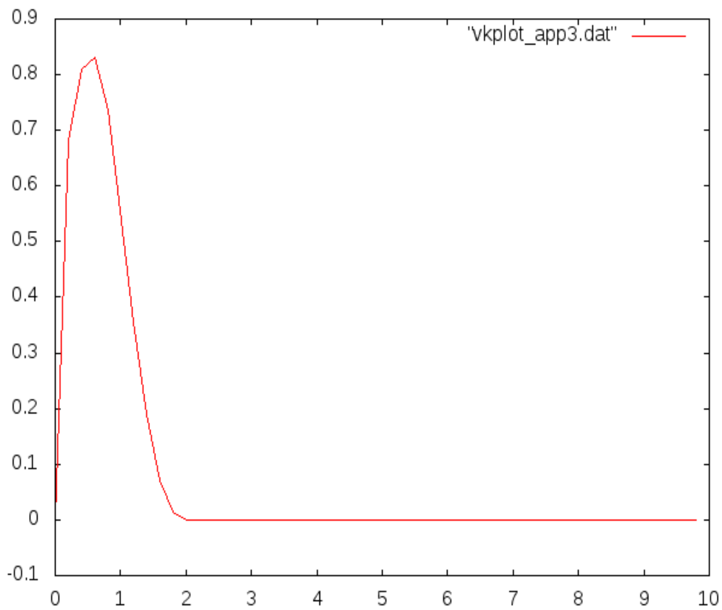
$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} C_i^{n+1}=C_i^n\left(1+2k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+C_{i+1}^n\left(-k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+C_{i-1}^n\left(-k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+(C_i^n-C_{i+1}^n)\dfrac{\Delta t}{\Delta x}V_i^n \quad si \quad V_i^n<0 \\[2ex] C_i^{n+1}=C_i^n\left(1+2k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+C_{i+1}^n\left(-k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)+C_{i-1}^n\left(-k\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)-(C_i^n-C_{i+1}^n)\dfrac{\Delta t}{\Delta x}V_i^n \quad si \quad V_i^n>0 \end{cases}}$$

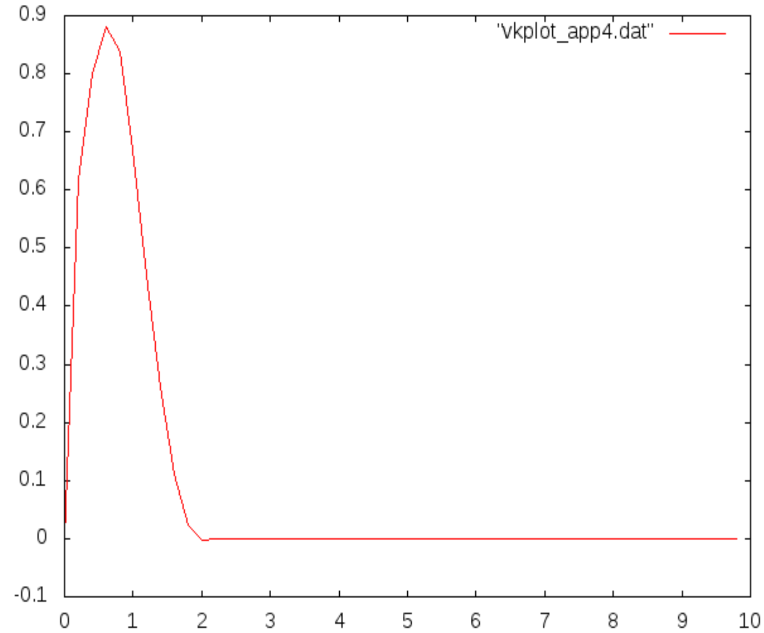
coefficient de diffusion k=0.01 avec vent variable
v(x,t)=5cos(Pi.t).sqrt(t)
$\Delta x=0.2$
$\Delta t=0.01$
Cas t=0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1

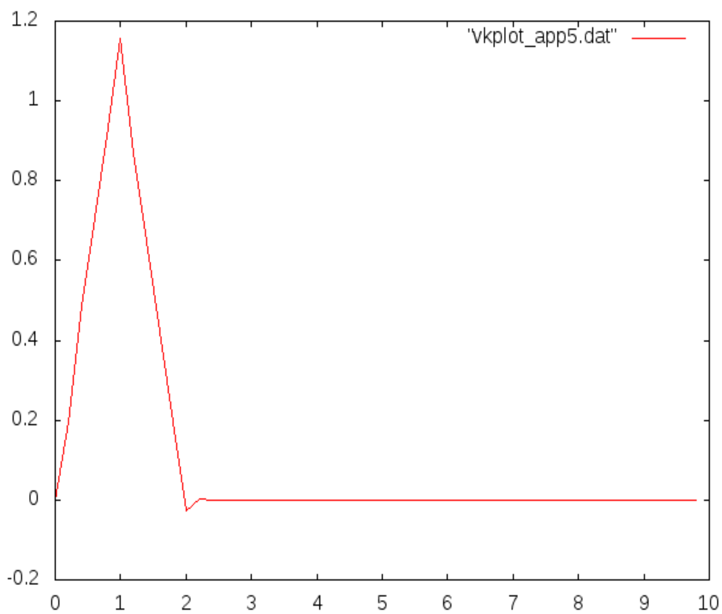




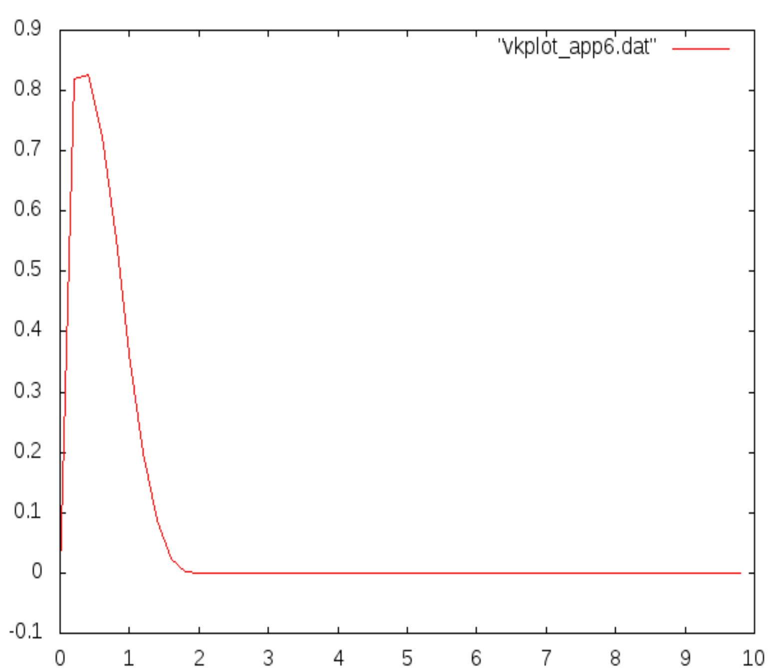
Le vent est encore faible, les particules se dissipent, et donc la courbe s'étale.

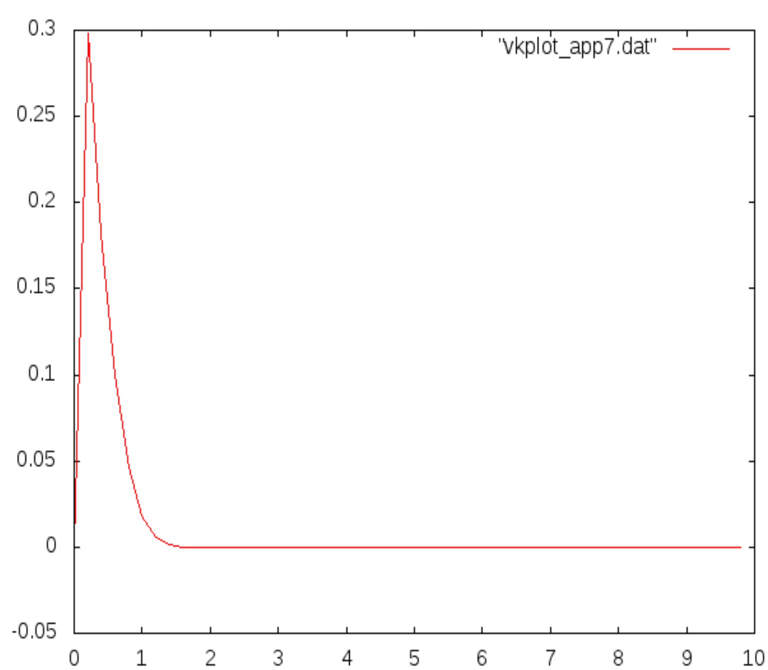


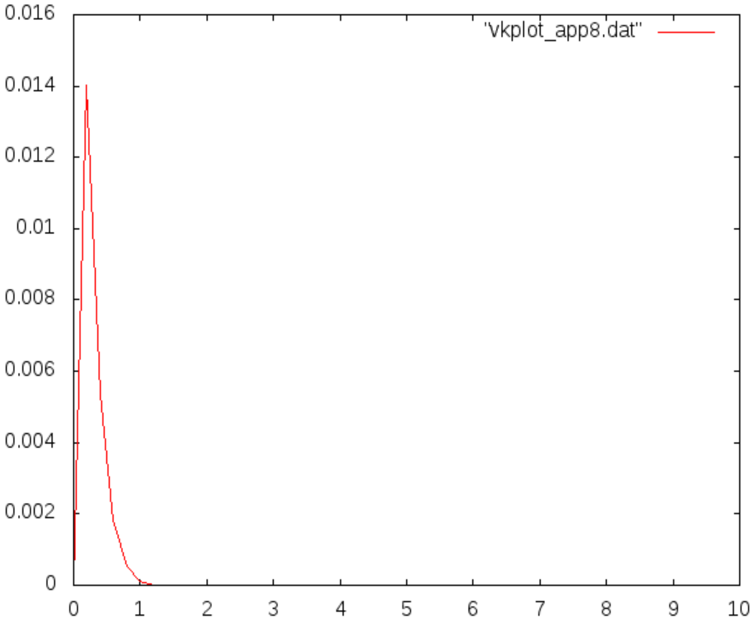


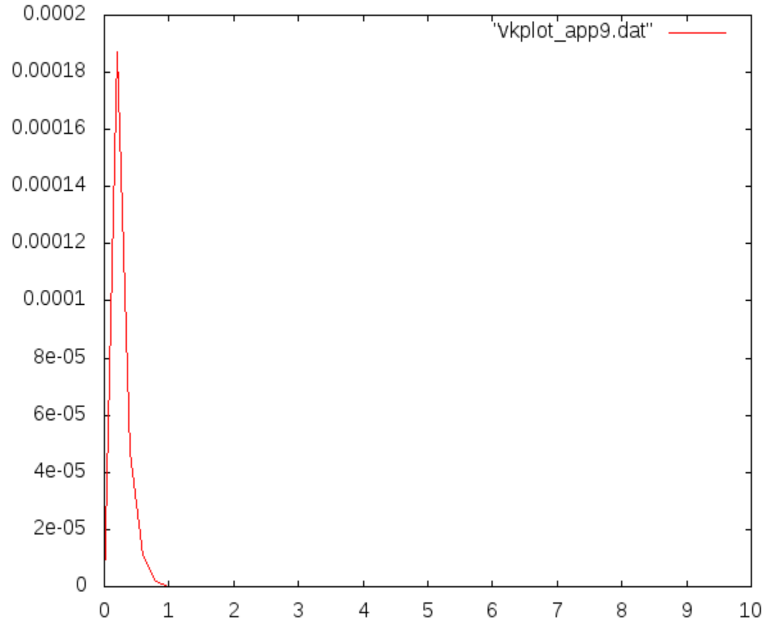


Pour les trois graphes précédents (3, 4, 5) :
Le vent souffle vers la droite et a donc tendance à pousser les particules vers la droite et donc à faire pencher la courbe vers la droite.









Pour les quatre derniers graphes :
Le vent souffle vers la gauche, et pousse donc la
courbe vers la gauche.